# 30 巧妙的图形分割

## 30.1 问题缘起

图形分割问题是一个扑朔迷离的问题。1926 年苏联数学家鲁金对“完美正方形”的存在提出了猜想，所谓“完美正方形”，是指它可以分割成一些边数各不相等且边长为整数的正方形。分割成小正方形的个数称为它的阶。

## 30.2 对“完美正方形”的追寻

1936 年这个问题引起了英国剑桥大学三一学院的四个学生塔特、斯通、布鲁克斯、史密斯的兴趣。他们当时考虑了这样一个问题：把一个矩形分割成边长各不相等的正方形。在当时已经知道长 33 宽 32 的矩形可以作正方形分割。他们四人中，斯通从一开始就怀疑“完美正方形”的存在问题，然而无法证实自己的见解；而其余三人则致力于寻找一个实际的“完美正方形”，但是几经失败后也开始倾向于斯通的看法。

正当思维难以找到它的出路的时候，在英吉利海峡的旁侧，响起了一声惊雷！柏林的施柏拉格居然实实在在找到了一个“完美正方形”。这无疑是对斯通等人的一记闷棍，然而他们并没有气馁，他们很快地改变了自己的研究方向。在理论的指导下，在 1938 年终于找到了一个由 39 个不同整数边正方形组成的大正方形，被称为“39 阶完美正方形”。这一成果大大

增强了他们继续研究的信心。光阴流逝，一晃过去了几十年，当年的大学生如今都成了蜚声数坛的组合数学专家和图论专家，他们的研究成果成功地运用到电子、化学、建筑学、运筹学、通讯学和计算机等多种学科，成为造福人类的有力工具。

## 30.3 人们寻求最小阶数的完美正方形

自从剑桥大学的四位学生找到了一个分割数为39个（即39阶）大小不同的“完美正方形”后（如图30-1），1964年由塔特的学生滑铁卢大学的威尔逊博士找到了一个25阶的完美正方形，后来这个图形保持了12年的最佳记录，直到威尔科克斯所创造的24阶完美正方形（如图30-2）。1978年荷兰数学家特温特技术大学的杜依维斯廷，用大型电子计算机算出了一个21阶的完美正方形（如图30-3）。1962年荷兰数学家丢伐斯丁证明了小于或等于19阶的完美正方形不存在；1978年又证明了20阶的完美正方形不存在，因而21阶完美正方形是完美正方形的尽头了。这个结论也同时被苏联数学家鲁奎所证明。

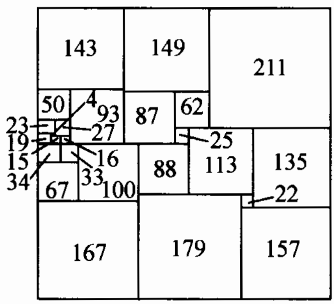


图 30-1

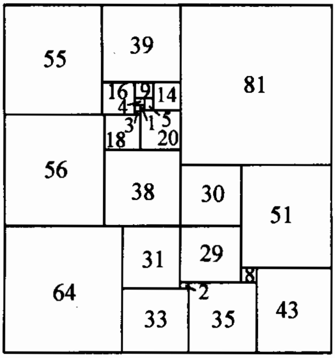


图 30-2

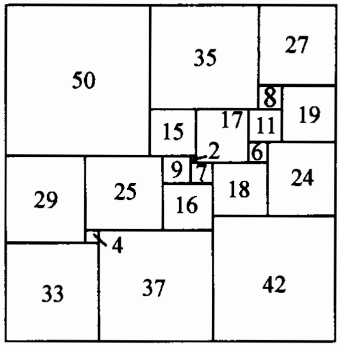


图 30-3

## 30.4 矩形的正方形分割

前面提到宽 32 长 33 的矩形可分割为边长不等的 9 个正方形(如图 30-4)。剑桥大学的斯通发现了可分割的矩形，即宽为 176 长为 177 的矩形可分为边长不等的 11 个长方形（如图 30-5)。

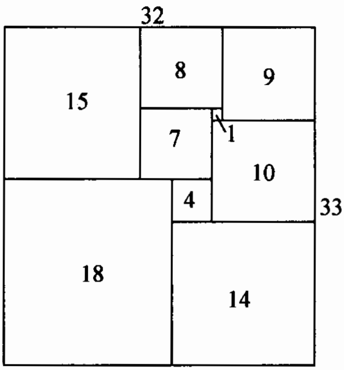


图 30-4

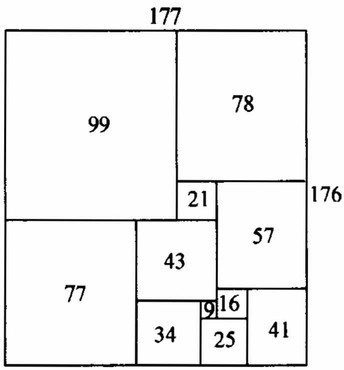


图 30-5

那么如何寻求矩形的正方形分割呢？办法是先作一个矩形的正方形分割草图，然后用尽可能少的未知数标出每个正方形

的边长，再写出这些边长应满足的关系式，最后再求解这个方程组。如图 30-6 先标出相邻三个正方形的边长 $x$，$y$，$z$，然后不难按下列顺序标出其余正方形的边长：$x+y$，$2x+y$，$y-z$，$y-2z$，$y-3z$，$2y-5z$。由矩形对边相等的条件，可得出

$$(2y-5z)+(y-2z)+(y-z)=(2x+y)+(x+y)$$

$$(2x+y)+(2y-5z)=(x+y)+y+(y-z)$$

及 $3x-2y+8z=0, x-4z=0$。

令 $z=1$, 得 $x=4, y=10$ 代入图中即可得。

下面我们再来看 $177\times176$ 的矩形是怎样进行正方形分割的，如图 30-7。我们只需用两个未知数 $x$，$y$，就足以表示所有正方形的边长，由水平边长相等，有

$$\begin{aligned}&(9x-5y)+(-2y)\\=&(2x+5y)+(x+2y)+(x+y)+(2x+y)\end{aligned}$$

亦即 $9x-16y=0$, $x=16$, $y=9$ 时就得到 $177\times176$ 矩形的正方形分割。

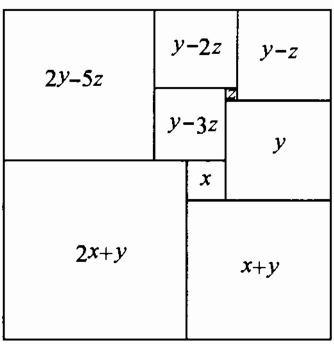

图 30-6

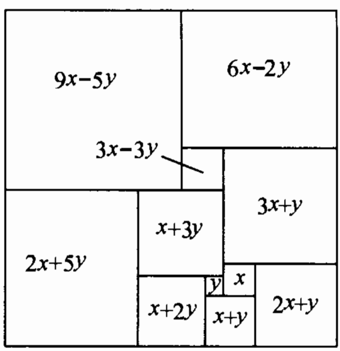

图 30-7

# 30.5 正方形的三角形分割

## 1. 正方形分割成直角三角形

将一个正方形分割成若干边长不等的直角三角形，要使正方形的边长尽可能小，而分割成的直角三角形数目也尽可能地少。这一问题最早由日本的铃木昭雄提出。至今虽然取得一些进展，但似乎看不见最终的目标。

1966 年，一个边长为 39780 的大正方形的三角形分割第一次被找到；在以后的 15 年内在 1000 以下的分割 10 以内的正方形三角分割总共也只有 20 种。图 30-8，是在 1968 年找到的边长为 1248 的正方形，由 5 个直角三角形组成。图 30-9 是 1976 年找到的边长为 48 的正方形是由 7 个直角三角形组成。以上分别是分割直角三角形数最少和大正方形边长最小，迄今为止的最好幻纪录。这是否是最终记录，还不得而知。

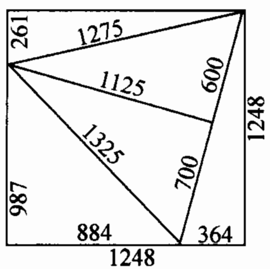


图 30-8

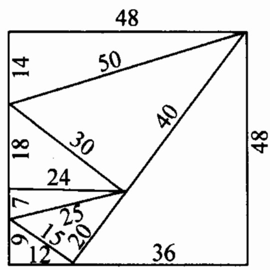


图 30-9

## 2. 正方形分割成锐角三角形

将一个正方形分割成若干锐角三角形，要求分割的锐角三

角形的个数尽可能少（虽不要求边长为整数）也是让人感兴趣的问题。

如图 30-10、图 30-11、图 30-12、图 30-13 分别是将正方形分割成 11 个、10 个、9 个、8 个锐角三角形的图形，将正方形分割成 8 个锐角三角形是一种巧妙的方法，要想再减少是不可能的。有趣的是，人们证明了如下事实，用边长分别为 1，2，3，……的正方形去覆盖平面，至少可以铺满整个平面的四分之三；还有人们已经证明要用边长大小不等的小正方体去填满一个大正方体是不可能的，亦即完美正方体是不存在的。

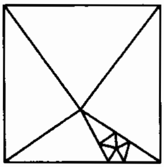

**图 30-10**

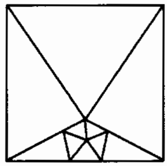

**图 30-11**

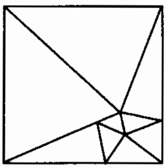

**图 30-12**

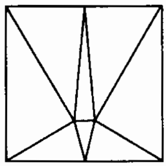

**图 30-13**

图形分割是一个令人困惑而有趣的问题，对于喜欢接受难题挑战的数学爱好者（可不受文化程度的限制），可以在图形分割中砥砺心志，获得乐趣。

## 30.6 其他图形的正三角形分割

如果把三角形、平行四边形分割成大小完全不同的正三角

形，人们发现这种分割是不存在的。如果降低某些要求，比如允许某些正三角形边长相等，则可以找到这种分割。如图 30-14 是将一个平行四边形分割成 13 个小正三角形（据称这是最小阶数的分割）。而图 30-15 是将一个正三角形分割成 15 个小正三角形。如果把正三角形记为“+”，把倒三角形记为“-”，视为不同的正三角形，在此意义下，这种分割是完美的。这样图 30-14、图 30-15 都可视为是完美分割。

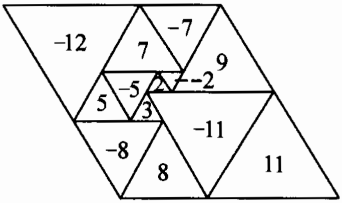


图 30-14

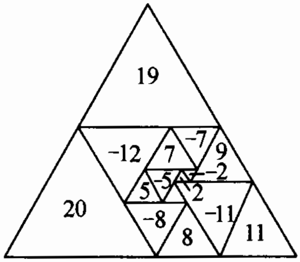


图 30-15