3 数学中的黄金分割美

3.1 五角星图形

我国的国旗、国徽、军旗、军徽都采用了五角星图案（一些其他国家也是如此)。而发现黄金矩形的毕达哥拉斯学派的会徽也是一个五角形，每个会员都佩带一个五角星标记的徽章。为什么五角星成为众多民族喜爱的图形？正五角星图形到底具有哪些美感呢?

五角星的形成来自于大自然（如五角星形花瓣)，它也和大自然一样，既有美妙的对称也有扣人心弦的变化。

将圆周分成五等分,依次隔一个分点相连,则可一笔画成一个图形,即成一个正五角星形(如图3-1)。首先,在连接的过程中就让人惊异于形成图形的奇妙(奇异的美);而连成的图形又具有如此明显的对称性(对称的美)! 五角星美的核心是五条边相互分割成黄金比(如图中 F、G 是 AC 的黄金分割点)这是一种最匀称的比,是给人产生美的原动力。因此,五角星形具有如此巨大的魅力,成为世人所喜爱的图形。

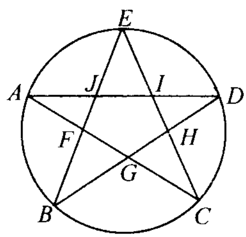

图 3-1

3.2 黄金图形

请看下面的几种黄金图形。

黄金矩形：宽与长之比为黄金数的矩形。对黄金矩形依次舍去所做的正方形，可得到不断缩小的黄金矩形序列。(如图 3-2)

黄金三角形：分两类，第一类是底与腰之比为黄金数的三角形，如图 3-3 中的△ABC，△BCD，△DEC，……组成不断缩小的三角形序列；第二类是腰与底之比是黄金数的三角形，如图 3-4 中的△ABC，△DAB，△EBD，……也组成不断缩小的黄金三角形序列，前述的埃及胡夫金字塔，其正投影即为此类黄金三角形。

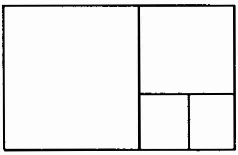

图 3-2

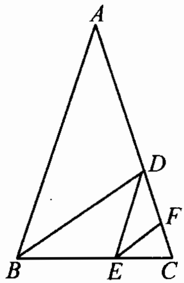

图 3-3

黄金椭圆：短轴与长轴之比为黄金数的椭圆（如图 3-5）。它的面积与以它的焦距为直径的圆的面积相等；它的离心率的平方也是黄金数。

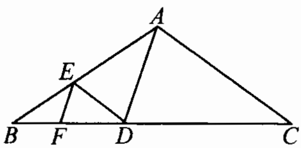

图 3-4

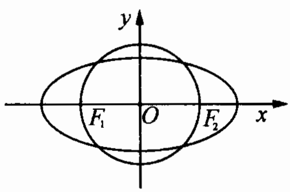

图 3-5

黄金双曲线：实半轴与半焦距之比为黄金数的双曲线(如图 3-6)。它的离心率的倒数也是黄金数。

这些黄金图形使人看起来赏心悦目，是同类图形中最和谐、优美的图形。

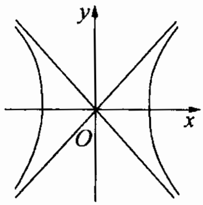

图 3-6

3.3 将黄金数表示为连分数

由线段的黄金比$\frac{1}{x}=\frac{x}{1-x}$，有 $x^2=1-x$，$x(1+x)=1$，得 $x=\frac{1}{1+x}$。

对等式右边分母中的 x 又以$\frac{1}{1+x}$代替，可得 $x=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+x}}$；

依次类推，可得连分数：$x=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}$。

这样一个简洁的连分数给人以有序而无穷的印象，使人具有不言而喻的美感，黄金数与连分数之间竟有如此迷人的联系，怎不让人惊叹！

3.4 菲波那契数列

13 世纪意大利数学家菲波那契在他的《算盘经》的修订版中增加了一道著名的兔子繁殖问题，为黄金分割大放异彩。

问题是一对兔子每一个月可以生一对小兔，那么，从刚出生的一对小兔算起，满一年可以繁殖多少对兔子？

则由第一个月到第十二个月兔子的对数分别是：1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，144，这个数列称为菲波那契数列。这个数列的一个特点是从第3项起，每一项等于它的前两项之和

$$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}\ (n\geqslant 3)$$

其通项公式为

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

奇妙的是公式中含有无理数$\sqrt{5}$，而 n 用整数代入时，所得的结果却都是正整数；另一出人意料的是，相邻两项的比$\frac{F_n}{F_{n-1}}$，当 n 趋于无穷大时，它的极限恰好是$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$。

菲波那契数列具有特殊、神秘的魅力。难怪近年国外出版了一种《菲波那契数列》杂志，专门发表有关这个数列的新发现和新用途的文章，使得菲波那契数列的研究长盛不衰，生生不息。