# 27 离奇的求 $\pi$ 方法

您知道吗？我们计算 $\pi$，除了用几何法、数列法、连分数法和现代计算机计算，还有一种不用繁杂计算的稀奇方法——实验法。

精确性是经典数学的一大特点，各种精确的计算公式和无懈可击的定理正是这种特点的表现之一。但现实生活中的许多问题，要找到描述它们的精确的数学公式却是十分困难的，甚至难以办得到。对于某些具有偶然性的事件更加如此。

## 27.1 蒲丰实验

法国著名数学家蒲丰，在研究偶然事件的规律时曾发现，有时数学问题无须进行繁杂的运算而只需通过实验会有其必然性的结果。由他设计的投针计算圆周率 $\pi$ 的实验就是应用这种方法的一个著名例子。

蒲丰实验：在一张纸上，用尺画一组相距为 $d$ 的平行线，用一些粗细均匀长度小于 $d$ 的小针扔到画了线的纸面上，并记录着小针与平行线相交的次数。如果投针的次数非常之多，则由扔出的次数，和小针与平行线相交的次数，通过某种运算，便可求出 $\pi$ 的近似值。历史上曾有不少数学家作过这个实验，结果如下表。

由表可看出，由抛针实验所得出的结果与 $\pi$ 值的确相近。

但也看出，拉兹里尼实验次数比乌尔夫少，但 $\pi$ 的精确度反而高。由此知，不一定实验次数越高，精确度就一定越高。

| 实 验 者 | 年 份 | 投掷的次数 $n$ | $\pi$ 值 |
|---|---|---|---|
| 乌尔夫 | 1850 | 5000 | 3.1596 |
| 史密斯 | 1855 | 3204 | 3.1553 |
| 福克斯 | 1894 | 1120 | 3.1419 |
| 拉兹里尼 | 1901 | 3408 | 3.1415929 |

## 27.2 抛针实验与 $\pi$

为什么从一些随意抛针实验中，会与圆周率 $\pi$ 发生联系呢？我们先看一个假想的试验：

找一根铁丝弯成一个圆圈，使其直径等于二平行线间的距离 $d$。那么，无论怎样扔下圆圈，都会和平行线有两个公共点(或者是两个交点或者是两个切点)，如图 27-1。如果扔 $n$ 次，则圆圈与平行线相交 $2n$ 个点次。如果把圆圈拉直成一根针，

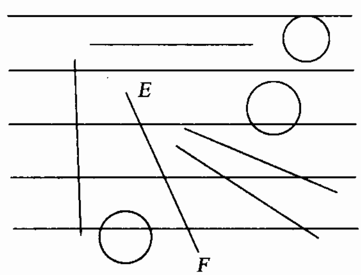


图 27-1

则针长$EF=\pi d$，这样,针 $EF$ 与平行线相交的方式有：4 个交点，3 个交点，2 个交点，1 个交点，0 个交点，如图 27-1。由于这是随机过程的多次重复试验，总的可能性和它在圆周形式下相同。因而，将针 $EF$ 扔$n$ 次，它与平行线相交乃 $2n$ 个点

次。经过多次（数千次）重复试验，证实针 $EF$ 与平行线相交点的次数 $m$ 将随着试验次数增大，而逐渐向 $2n$ 逼近。如果用不同长度的针 $l$，$l'$ 投掷，它们与平行线相交的次数与针 $l$，$l'$ 的长度 $l$，$l'$ 成正比。

由上可知，用针长为 $l$ 的针与针长为 $\pi d$ 的针 $EF$，分别投掷 $n$ 次，则它们分别与平行线交点的次数 $m$ 与 $2n$ 之比为 $\frac{m}{2n}=\frac{l}{\pi d}$，即 $\pi=\frac{2nl}{md}$，如果我们取 $l=\frac{d}{2}$，则有 $\pi=\frac{n}{m}=\frac{\text{投扔总次数}}{\text{碰线总次数}}$，这个试验的设计和公式，首先是由法国博物学家蒲丰在论文“或然性算术尝试”中提出的。

1901 年，意大利的拉兹里尼，使用长为 $l=0.83d$ 的针，投扔了 3408 次，求出 $\pi$ 的近似值 3.1415929，准确到小数点后 6 位。这不但为圆周率的研究开辟了一条新路，并逐渐发展成为一种新的数学方法——统计试验法（又叫“蒙特卡罗方法”）。现在这个工作尽可全部交由计算机，在几秒钟之内便可完成。

## 27.3 另一种奇特的求 π 方法

您相信吗？如果让一些人，每人任意随机地写出几个正整数对，然后由写出的所有正整数对中，检查多少对正整数是互质的，再由互质的对数与所有给出的正整数对的比，竟可求得 $\pi$ 的近似值。这实在是出人意料，简直是超出了常人的想像力，而使人感到震惊！

事实上，有人就作过这样的试验。大约在 1904 年，查里斯叫 50 名学生每人随机地写出 5 对正整数，在所得的 250 对

正整数中，它发现有 154 对是互质的，这样出现的互质数对的概率便是$\frac{154}{250}$。如果把这个数目说成$\frac{6}{x^2}$，则可算出 $x=3.12$，而 $\pi=3.14159\cdots$，“奇迹”终于出现了！

要严格证明上述概率是$\frac{6}{x^2}$，需要用到较高的数学知识，而且很难找到像蒲丰实验那样巧妙的设计与证明。我们只能通过以下简单的例子而得到解释。

随机地写出两个小于 1 的正数 $x$ 与 $y$，它们与数 1 一起组成三数组（$x$，$y$，1）。这样的三个数正好是一个钝角三角形三边的概率是$\frac{\pi-2}{4}$。这个实验与查里斯实验的结构是极其相似的。但是它的证明却无需用到很多的数学知识。由于 $0<x$，$y<1$，所以，以数对（$x$，$y$）确定的点必均匀分布在单位正方形内。也就是对应的点（$x$，$y$）出现在正方形中每一处的机会都相等。如果符合条件的点（指三数（$x$，$y$，1）能构成钝角三角形的数对（$x$，$y$）对应的点），落在一个阴影区域 $G$ 内，如图 27-2，根据机会均等原则，所求概率应为 $p=\frac{G\text{ 的面积}}{\text{正方形面积}}$，我们再来考虑以 $x$，$y$，1 为边长的钝角三角形，如图 27-3，由于 $0<x$，$y<1$，可知 $x$，$y$ 边所对的角都是锐角，只有为 1 的边所对的角 $A$ 为钝角，在$\triangle ABC$ 中，由余弦定理，有 $1^2=x^2+y^2-2xy\cos A$，即 $x^2+y^2=1+2xy\cos A$，由于 $\cos A<0$，所以 $2xy\cos A<0$，故得

$$x^2+y^2<1 \qquad (27.1)$$

此即$\triangle ABC$ 为钝角三角形的充要条件。

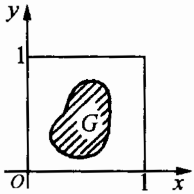


图 27-2

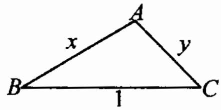


图 27-3

而以三数（$x$，$y$，1）为边构成的三角形的必要条件是 $x+y>1$，亦即

$$y>1-x \tag{27.2}$$

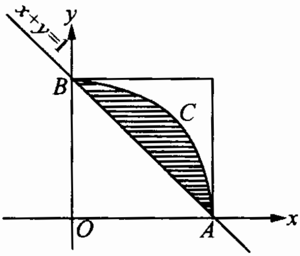


图 27-4

因满足不等式（27.1）的点（$x$，$y$）在单位圆内部，而满足不等式（27.2）的点（$x$，$y$），在正方形对角线 $AB$ 的上方。故同时满足不等式（27.1）、（27.2）的点必落在图 27-4 的阴影部分内。这样三数（$x$，$y$，1）能构成三角形的概率

$$p=\frac{\text{弓形 }ABC\text{ 的面积}}{\text{单位正方形的面积}}$$

$$=\frac{1/4\text{ 单位圆的面积减去三角形 }ADB\text{ 的面积}}{\text{单位正方形的面积}}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}\pi\times1^2-\frac{1}{2}\times1\times1}{1^2}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}=\frac{\pi-2}{4}$$

这不是吗？“$\pi$”确实出现在随机写数的场合中，这是多么神奇！

下面，便可进行类似于查里斯的试验了：可叫来许多的学生，让每人随机地写下一对小于 1 的正数，然后，让大家检查

一下，看随机写下的两个数 $x$，$y$ 与 1 能否构成一个钝角三角形（即要同时满足二不等式：$x+y>1$，$x^2+y^2<1$）。若有 $m$ 名学生，写出的数对中能与 1 构成钝角三角形三边的数对 $(x, y)$ 有 $n$ 个。则有 $\frac{n}{m}=\frac{\pi-2}{4}$，这样便有 $\pi=\frac{4n}{m}+2$。