26 漫话勾股定理

"在直角三角形中，两条直角边的平方和，等于斜边的平方。"我国古代，称直角三角形的两条直角边为"勾和股"，称斜边为"弦"。因而此结论在我国称为"勾股定理"，是我们最熟悉的一个平面几何定理。

早在周朝初年（公元前1100），我国就发现了勾股定理的一个特例：勾三、股四、弦五。在我国古算书《周髀算经》中就已经介绍了勾股定理这一结论，但未予以证明。公元3世纪，三国时吴人赵君卿给出了勾股定理的一个巧妙的证明。

在西方，这个定理称为"毕达哥拉斯定理"，在公元前500余年由古希腊数学家毕达哥拉斯发现。相传，毕氏发现这一定理时，曾宰牛百头，广设盛筵以示庆贺，可知对这一定理的重视。

勾股定理提出距今虽已有两千余年，但各种证明方法仍接连涌现，世界各地的人们对其着迷程度依然不减。这一定理证明方法之多是任何其他定理所无法比拟的。据说，现在世界上已找到了证明400多种，由鲁密斯搜集整理的《毕达哥拉斯》一书就给出了370种不同的证法。

26.1 勾股定理的几种特殊而美妙的证法

1. 赵君卿证法

三国时，吴国的数学家赵君卿提出了以下巧妙的证法：如图26-1、图26-2是两个全等的正方形，双方都去掉四个全等

带阴影的直角三角形后，两正方形中剩下的部分面积应相等，可知有

$$a^2+b^2=c^2$$

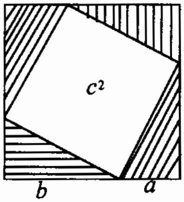

图 26-1

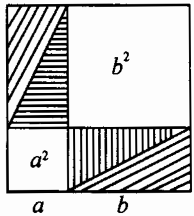

图 26-2

2．伽菲尔德证法

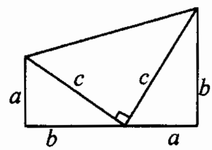

图 26-3

美国第 20 任总统伽菲尔德对数学有着浓厚的兴趣。1876 年，当他还是一名众议员的时候，就发现了对勾股定理的一种巧妙的证法，并发表在《新英格兰教育杂志》上。如图 26-3，他是用两种方法来计算同一个梯形面积的。

$$\text{梯形面积}=\frac{1}{2}(\text{上底}+\text{下底})\times\text{高}$$

$$=\frac{1}{2}(a+b)(a+b)$$

又 $$\text{梯形面积}=\text{三个直角三角形面积之和}$$

$$=\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}c^2$$

于是有 $\frac{1}{2}(a+b)(a+b)=\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}c^2$，即 $a^2+2ab+b^2=ab+ab+c^2$，所以有 $a^2+b^2=c^2$。

3. 折叠剪纸的证明

将以 b 为边的正方形剪成 4 块（如图 26-4），和以 a 为边的正方形（如图 26-5）共 5 块图形合成一个以 c 为边的正方形（如图 26-6），它显示出 $a^2+b^2=c^2$。

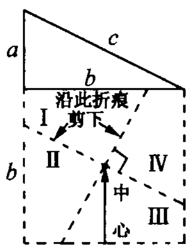

图 26-4

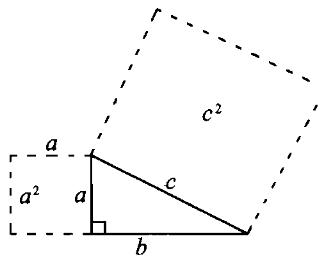

图 26-5

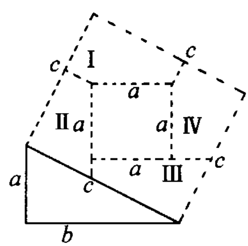

图 26-6

26.2 勾股定理与无理数

无理数是无限不循环小数。如$\sqrt{2}=1.41421356\cdots$，$\pi=3.141592653\cdots$，等，为了获得更为精确的近似值，如今已可用高功率计算机和无穷数列可将这些近似小数求到任何精确的程度，然而我们应考虑耗费的时间和效果。

令人惊奇的是，对于许多无理数，用勾股定理可以将其准确地求出。古希腊数学家用勾股定理作出了一些长度为无理数（与单位长度相比）的精确线段。

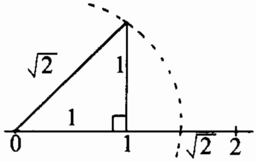

图 26-7

如$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{6}$，$\sqrt{7}$，……这些线段的长度都可以用勾股定理作出。然后利用圆规画弧将其定位于数轴上。如图 26-7 是$\sqrt{2}$的线段的作法。

26.3 勾股数组

所谓勾股数组，是由三个正整数组成的集合，这三个数适合以下关系：即其中两个数的平方和，等于第三个数的平方。

是否有一个能产生勾股数组的公式？古希腊人曾发现，当 m 是一个正整数时，则有

$$\left(\frac{m^2+1}{2}\right)^2=\left(\frac{m^2-1}{2}\right)^2+m^2$$

当 m 取大于 1 的正奇数时，m，$\frac{m^2+1}{2}$，$\frac{m^2-1}{2}$是一组勾股数组。如当 $m=15$，$113^2=112^2+15^2$，所以 15、112、113 是一组勾股数组。显然当 m 取正偶数时，不能组成勾股数组。

柏拉图公式$(m^2+1)^2=(m^2-1)^2+(2m)^2$，这个公式也同样不能给出所有的勾股数组，因 m^2+1 与 m^2-1 只差 2，所以像 7、24、25 这样的勾股数组就不能给出。

欧几里得公式：如果 x，y 是正整数，则有$(x^2+y^2)^2=(x^2-y^2)^2+(2xy)^2$

$\therefore a=x^2-y^2$，$b=2xy$，$c=x^2+y^2$，$\therefore$有 $a^2+b^2=c^2$。

这个公式能产生所有勾股数组。

26.4 勾股定理的推广

1. 推广 1——边上图形一般化

勾股定理有如下关系：$a^2+b^2=c^2$。即给出一个直角三角形，立于直角边 a、b 边上的两个正方形面积之和，等于立于斜边 c 上正方形的面积（如图 26-8）。

假如我们把立于直角边上和斜边上的正方形，用其他相似图形代替，它们的面积是否也有以上的关系呢（如图26-8）？

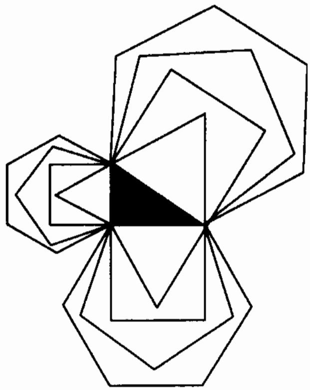

图 26-8

欧几里得在《几何原本》中记述了该定理的一个推广，即“直角三角形斜边上的一个多边形，其面积等于两直角边上两个与它相似的多边形面积之和。”(如图 26-8)，并给出了一般性证明：设 a、b、c 三边上所立三个相似多边形的面积分别为 S_a、S_b、S_c，$\because \frac{S_a}{S_c}=\frac{a^2}{c^2}, \frac{S_b}{S_c}=\frac{b^2}{c^2}, \therefore S_c \cdot a^2=S_a \cdot c^2, S_c \cdot b^2=S_b \cdot c^2$，相加，得

$$S_c(a^2+b^2)=(S_c+S_b)c^2, \because a^2+b^2=c^2, \therefore 有\ S_a+S_b=S_c$$

2. 推广 2——边上图形不相似

帕普斯是公元前 300 年的一位希腊数学家。他证明了勾股

定理的一个有趣的变形：即将立于直角三角形边上的正方形改为平行四边形（不一定相似），但需按以下步骤构造平行四边形（如图 26-9）：

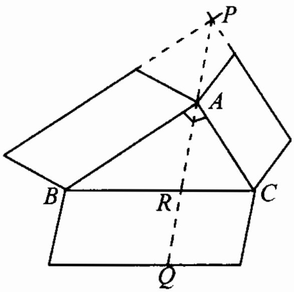

图 26-9

（1）在二直角边上构造任意大小的两个平行四边形。

（2）延长此二平行四边形的边使其相交于点 P。

（3）连接 PA 并延长使其与 BC 相交于 R，并取 $RQ=PA$。

（4）以斜边 BC 为一边画平行四边形，并使其另一组对边与 RQ 平行且相等。

作出的三个平行四边形面积会有如下关系：“立于斜边上的平行四边形的面积等于立于直角边上其他两平行四边形面积之和”。

至于如何证明，留待读者去思考。

3. 推广 3——推广为任意三角形

若 a、b、c 分别表示任意△ABC 的三条边长，C 为边 c 的对角，则有

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

此即余弦定理。

4. 推广 4——推广为凸多边形

点 P 是凸多边形 A_1A_2，…，A_n 所在平面上任意一点，从点 P 分别向各边作垂线，垂足分别为 B_1，B_2，…，B_n（如

图 26-10)，则有

$$A_1B_1{}^2+A_2B_2{}^2+\cdots+A_nB_n{}^2$$
$$=B_1A_2{}^2+B_2A_3{}^2+\cdots+B_{n-1}A_n{}^2+B_nA_1{}^2$$

(证略)

特别地，对于三角形，当点 P 在 A 点时（如图 26-11），有$AB^2+CD^2=AC^2+BD^2$，当 C、D 重合时，即为勾股定理。

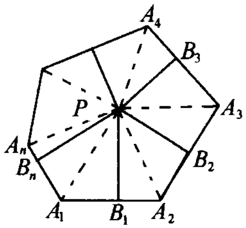

图 26-10

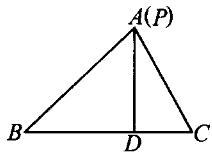

图 26-11