25 几何与日常生活

您如果远离数学，就会认为数学是“高高在上”，“可望而不可及”的；您如果亲近数学，就会觉得它可亲可爱。您甚至会发觉数学与现实也是如此接近。数学的美也体现在它的应用。生活中处处有数学，处处可用上数学，有时数学会为您帮上大忙，培养学生的“用数学意识”，也是素质教育的一部分。

下面列举几件几何在日常生活中的应用。

25.1 最佳观画位置

某艺术馆举行美术展览。一幅名画高 9 尺，挂在墙上后底边离地面 8 尺。如果有一个人眼睛离地面 5 尺，问此人站在离墙面多远时，观画效果最好？

说明：当此人眼睛与画的上、下高度所形成的视角最大时，观画效果最好。

如图 25-1：画高 $AD=9$（尺），画底边离地面距离为 $DF=8$（尺），人眼离地面距离为 $CF=5$（尺），则有 $DC=8-5=3$（尺）。由此问题转化为在高出地面 5 尺的水平线 CP 上找一点 B 使 $\angle ABD$ 最大。

由平面几何知识知：只需作一过 A、D 两点且与水平线 CP 相切于 B 点的圆，则 $\angle ABD$ 最大。

事实上，我们再在水平线 CP 上任取一点 B'，连接 AB' 且与圆周相交于 G，再连接 DG，DB'，则有 $\angle ABD=\angle AGD>\angle AB'D$，可知视角 $\angle ABD$ 最大。

下面再计算这时此人离墙的距离 BC 之长：将点 C 看成是圆外一点，则 CA 是圆的割线，CB 是圆的切线，由切割线定理有 $CB^2 = CA \cdot CD = 12 \times 3 = 36$，所以 $CB = 6$（尺），故此人站在离墙面距离 6 尺时，观画效果最好。

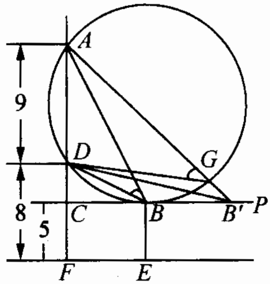

图 25-1

由此可以看出，欣赏某一幅艺术品时，不见得离此物品越近越好。

说明：此题曾改编作为一道高考题，是利用求三角函数极值来做的。其实利用以上的平面几何方法，初中学生也可作出。

25.2 足球射门

有甲乙两支足球队进行比赛，甲队右前锋传一沿直线 l 球至乙队门前（球门为 AB），若甲队中锋赶上，应在直线 l 上哪一点射门，进球的机会最大？

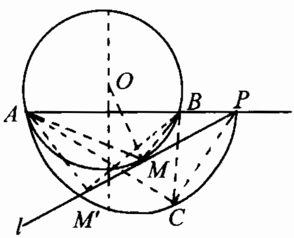

图 25-2

分析：问题实质是在直线 l 上找一点 M，使 $\angle AMB$ 最大，则 B 点乃是他选取的最佳点。

如图 25-2：设直线 l 与直线 AB 的延长线相交于 P，以 AP 为直径作半圆，再过 B 作 $BC \perp AP$ 交半圆于 C，再以 P 为圆心，PC 为半径作弧与直线 l 相交于 M，则 M 点为最佳射门点。下面

我们来加以证明：

连接 PC、AC，因 AP 为半圆直径，所以，有 $\angle ACP = 90^\circ$，又 $\because BC \perp AP$，在 Rt$\triangle ACP$ 中有 $PC^2 = PB \cdot PC$，而 $PM = PC$，$\therefore$ 有 $PM^2 = PB \cdot PA$，由切割线定理的逆定理知 B、A、M 必在同一圆周上。过 M 作 l 的垂线与 AB 的中垂线相交于 O，以 OA 为半径作圆，则圆 O 必与直线 l 相切于 M。连接 MA、MB，则 $\angle AMB$ 对 AB 的张角最大。证明可仿上题可求得 $\angle AMB > \angle AM'B$（M' 为 l 上异于 M 点的任意一点）。

下面举一足球射门的问题，请读者自行判别，如图25-3：

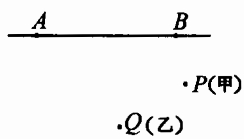

图 25-3

在足球比赛场上，甲、乙两名队员相互配合向对方球门 AB 进攻，当甲带球冲到 P 点时，乙已跟冲到 Q 点，问此时是甲射门好，还是将球传至乙射门好？这是一道不难解决的问题。

25.3 选定架桥位置

公园内有两条小河 AO、BO 在 O 处汇合，两河形成的半岛上有一处古迹 P（如图 25-4）。现计划要在两条小河上各建一座小桥 Q、R，并在小岛上修三段小路 PQ、QR、RP 连通两座小桥与古迹，这两座小桥应建在何处，才能使修路费用最小？

分析：要使修路费用最小，只需使 $\triangle PQR$ 的周长最小。

下面我们来看 Q、R 两座小桥具体怎样选取；

作 P 点关于 AO 的对称点 P'，再作关于 BO 的对称点 P''，连接 $P'P''$，分别与 AO、BO 相交与 Q、R 即为所求两座小桥的位置。这时 $\triangle PQR$ 的周长最小。

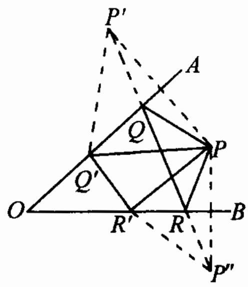

图 25-4

下面给出它的证明：

在 AO 上取一个异于 Q 的点 Q'，在 BO 上任取一个异于 R 的点 R'，并连接 $P'Q'$、$Q'R'$、$R'P''$。

$\because \quad PQ + QR + RP = P'Q + QR + RP'' = P'P''$

而 $PQ' + Q'R' + R'P = P'Q' + Q'R' + R'P'' > P'P''$

$\therefore \quad PQ + QR + RP < PQ' + Q'R' + R'P''$

故知 $\triangle PQR$ 的周长最小。

25.4 台球桌上的数学

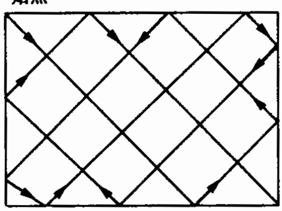

图 25-5

在玩台球游戏中，竟然也用上了数学。如图25-5，给出一张长宽为整数比的台球桌，例如这个比为 7:5。一个球从一个角落以 45° 角击出，在桌子边沿上回弹若干次后，最终必将落入角落的一个球囊。事实上，回弹的次数跟台球桌长与宽的最简整数比 $m:n$ 有关。到达一个角落前的回弹次数 $= m + n - 2$，故在上述台球回弹的总数为 $7 + 5 - 2 = 10$（次）。

25.5 柳卡问题

这是一个著名的数学问题，因由数学家柳卡提出，故称柳卡问题。法国数学家柳卡，在 19 世纪的一次国际会议期间，一天在来自世界各地的数学家参加的晚宴上，向在座的数学家提出了一个被称为“最困难”的问题：

“每天中午有一艘轮船从法国巴黎的勒阿佛尔开往美国的纽约，且每天同一时间也有一艘轮船从纽约开往勒阿佛尔。轮船在途中都需要七天七夜。假定所有轮船都以同一速度、同一航线行驶。问某艘从勒阿佛尔开出的轮船，在到达纽约时，能遇到几艘从纽约开来的轮船?”

问题提出后，一时竟难住了这些数学家。经过一番思考后，有的说遇到了 7 艘，有的说是 14 艘，但都回答不全面，连柳卡本人，也不知到底是多少? 直到过了一段时间后，才被一位数学家画了一张实验性的“时间——路程图”（又称运程图）简单得出人意料地将此问题解决了（如图 25-6）。从图可清楚地看出某艘从勒阿佛尔开出的轮船在中途遇到从纽约开过来的轮船 13 艘，加上开航时与启航时相遇的两艘，共有 15 艘，这样所谓的柳卡问题（会船问题）便彻底获得了解决。

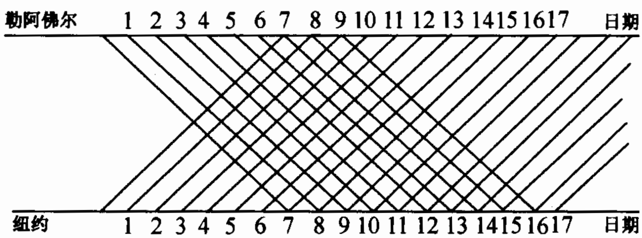

图 25-6