23 几何名题赏析

在两千多年的几何学的发展历史中，有许多的几何名题像一颗颗在天空闪烁璀璨的明星，光耀照人，对它们新的解法的寻求推动着几何学乃至整个数学的发展。它们是先哲智力的结晶，发人深思、耐人寻味；像一颗颗光彩夺目的明珠，供人欣赏而长久不衰。两千多年以来，几何历史上的“三大难题”也一直困扰着人们，直到 19 世纪前，各国的许多数学家曾为它们绞尽脑汁，企图用尺规作图来解决，虽然终究以失败而告终，但由此产生的一些新思路、新方法和由此派生出的名题，其意义恐怕超过了“三大难题”的解决。

我们从几何名题中挑出几件精品，加以介绍并领略其中的极妙意境。

23.1 希波克拉底定理（月牙定理）

人们在追求“化圆为方”的难题的解决过程中，发现有一些除圆以外奇妙的曲边图形的面积会和某个多边形面积相等。这种发现最早应归功于古希腊的几何学家希波克拉底。他首先发现了如下的结论：“以直角三角形两直角边向外作两个半圆，以斜边向内作半圆，则三个半圆所围成的两个月牙形（希波克拉底月牙）面积之和等于该直角三角形的面积。”（如图 23-1）下面给出它的证明：

设$\triangle ABC$ 为直角三角形，a、b 为二直角边，c 为斜边。由勾股定理有 $a^2+b^2=c^2$，则有 $\frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2=$

$\frac{1}{2}\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2$。即直角边上两个半圆面积之和等于斜边上半圆的面积。

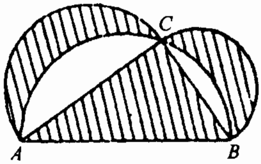

图 23-1

再从上面等式中，两边同时减去图中不带阴影两个月牙形面积 S_1、S_2，便可得出结论："直角边上的两个月牙形的面积之和等于直角三角形的面积。"

希波克拉底对几何学的贡献很大，他的《几何纲要》是几何学的第一本教科书，据说包括了欧几里得《几何原本》的前四卷内容。希波克拉底曾致力于"化圆为方"和"立方倍积"问题的研究。而他的"月牙定理"的发现，曾给数学家以很大的鼓舞，认为"化圆为方"问题也不难解决了。包括希波克拉底也这样认为。他曾先将一般直角三角形改为等腰直角三角形，并指出："正方形边上的两个月牙形面积之和等于该正方形面积之和的一半。"（如图 23-2）

这显然是对的。但他未加证明"想当然"地将圆内接正方形的结论"推广"到圆内接正六边形："正六边形三边上的月牙形面积之和等于正六边形面积的一半。"（如图 23-3）这显然是错误的，而他在此错误基础上却引出了更错误的结论："圆可以化为方。"

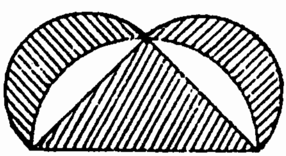

图 23-2

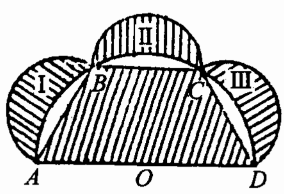

图 23-3

月牙定理结论的优美令人称奇不已，显示了割补的技巧，终于使人相信一个曲边形的面积竟可以用一个直边形的面积代替。这就大大开启了我们的心灵之窗。其实希波克拉底还作出了一个与月牙形等积的正方形（如图 23-4），即

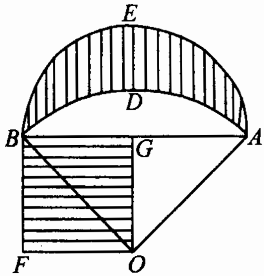

图 23-4

$$S_{\text{月牙}ADBE}=S_{\text{正方形}BFOG}$$

应该承认希波克拉底解决问题的方法是天才的。但他在处理所谓的“化圆为方”的问题时，却犯了对命题未加证明就“想当然”作出结论的毛病，从而得出了错误的结论。这一著名实例对我们学习数学的青年人是很有借鉴作用的。

23.2 莫利定理

也许是“三大几何难题 ”让人绞尽脑汁也难以获解，因而人们长期以来也不敢去涉及角的三等分线问题。自欧几里得之后的几千年内未发现有关角的三等分方面的结果。然而到 1904 年，英国著名的代数几何学家莫利却发现了一个惊人的结论，即所谓的“莫利定理”：将任意三角形的内角三等分，则与每边相邻的两条三等分线的交点构成了一个等边三角形。(如图 23-5）结论是这么漂亮、优美，简直难以置信。这一惊人的结果，被誉为自欧几里得以来所发现的最为优美的定理，是初等几何的一颗明珠。

莫利是数学家，他的最后 50 年是在美国度过的，但他一直未放弃英国籍。1904 年，莫利给英国剑桥的一位朋友的信

中提到过这个定理，20 年后才在日本发表。此期间这个定理再次被发现并作为问题征解出现在《教育时报》上。在送交的众多答案中，纳拉尼恩加给出的证法最为简洁，且是纯几何法。下面我们来介绍他的证法（如图 23-6）。

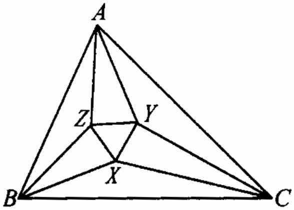

图 23-5

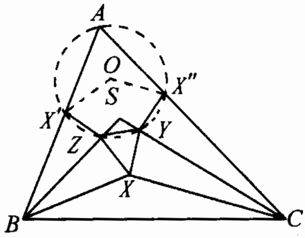

图 23-6

设△ABC 的$\angle A=3\alpha$，$\angle B=3\beta$，$\angle C=3\gamma$。与 BC 边相邻的两条三等分分角线相交于 X，$\angle B$ 和$\angle C$ 的另两条三等分分角线相交于 S，则 X 为△SBC 的内心，从而 XS 平分$\angle BSC$。

在 SX 两侧分别作$\angle SXZ=\angle SXY=30^\circ$，$Z$、$Y$ 分别在 BS、CS 上，则△$SXZ\cong$△SXY，所以 $XZ=XY$，又$\angle ZXY=60^\circ$，所以△XYZ 为等边三角形。

下面证 AZ、AY 三等分$\angle A$：

分别在 BA、CA 上截取 $BX'=BX$，$CX''=CX$，则△$BZX'\cong$△BZX，从而 $ZX'=ZX=ZY$，同理有 $YX''=ZY$，

$\therefore\quad X'Z=ZY=YX''$

$$
\begin{aligned}
\text{且}\angle X'ZY &=360^\circ-2\angle BZX-60^\circ\\
&=360^\circ-2\left(\frac{1}{2}\angle S+30^\circ\right)-60^\circ\\
&=240^\circ-\angle S=240^\circ-(180^\circ-2\beta-2\gamma)\\
&=60^\circ+2(\beta+\gamma)=60^\circ+2(60^\circ-\alpha)\\
&=180^\circ-2\alpha
\end{aligned}
$$

同理可证$\angle ZYX''=180^\circ-2\alpha$

作$\triangle X'ZY$的外接圆O，由对称性可知X''也在外接圆O上。

易证圆心角$\angle X'OZ=\angle ZOY=\angle YOX''=2\alpha$。故$\angle X'OX''=6\alpha$。又因为$\angle A=3\alpha$，所以点$A$也在圆$O$上，又弦$X'Z=ZY=YZ''$，得$AZ$，$AY$为$\angle A$的三等分线，从而命题得证。

莫利定理可进行引申和推广，得到许多优美的结论。如把任意三角形的内角三等分线改为外角三等分线，则与每边相邻的三等分线的交点构成了一个等边三角形。

把内角外角的三等分线结合起来，则有：每一内角的两条三等分线与不相邻的外角四条三等线中与每边相邻两线的交点构成了一个等边三角形。

更有趣的是1939年法国数学家勒贝格在他的一篇论文中指出：在三角形的所有三等分线中，可以找出27个点，它们都是等边三角形的顶点。

有兴趣的读者，您不妨去仔细品味定理的内容，探索各种证法与推广，一定能使您在精神上得到巨大的享受。

23.3 蝴蝶定理

几何上的一些重要定理，有的是以发现者的名字命名（如莫利定理），有的是以其主要性质命名（如勾股定理），也有的是以几何形状来命名的。蝴蝶定理就是其中的一例。

蝴蝶定理：设PQ是圆的一条弦，过PQ的中点M再作两条弦AB、CD，弦AD、BC分别交PQ于E、F，则$ME=MF$（如图23-7）。

由于其形状像一只翩翩起舞的蝴蝶，因此大家称该命题为

“蝴蝶定理”。

1815 年英国的一家通俗杂志《男士日记》作为征解刊出了该题，百余年来出现过许多优秀的解法。它的第一个证明是 1815 年英国数学家霍纳给出的，但证明十分繁琐。在国外资料中初等的证明方法一般认为是由一位中学教师斯特温给出的，他用的是面积法。

蝴蝶定理自 1985 年由杜锡录教授介绍到我国后，蝴蝶定理的美名便在神州大地上传开，并引起了许多数学爱好者的兴趣，提供了许多优美的证法。下面介绍一种初等数学的简便证法，供读者欣赏（如图 23-8)。

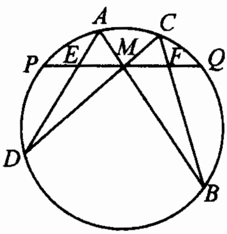

图 23-7

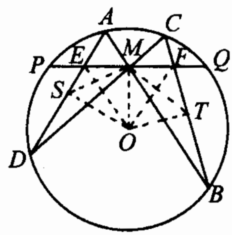

图 23-8

过圆心 O 作 $OS \perp AD$ 于 S，$OT \perp AD$ 于 T。连接 OE、OF、OM、SM、TM。

$\because$ $\triangle AMD \backsim \triangle CMB$，且 $SD = \frac{1}{2}AD$，$BT = \frac{1}{2}BC$

$\therefore$ $\frac{DS}{BT} = \frac{DM}{BM}$，又 $\because \angle D = \angle B$

$\therefore$ $\triangle MSD \backsim \triangle MTB$；又 $\angle MSD = \angle MTB$

$\therefore \angle MSE = \angle MTF$；又 O、S、E、M 与 O、T、F、M 均满足四点共圆，

$\therefore \quad \angle EOM = \angle FOM$

又$\because OM \perp PQ$，$\therefore ME = MF$

蝴蝶定理由于其美丽的图形引起了世人的广泛兴趣。因此，对它的证明可算是形式多样，五彩缤纷。除了上述证法外，还有面积法、三角证法、计算法、综合法、不等式法、极限法等等。1988 年中国科技大学的单樽博士给出了一个漂亮的解析证法。而且，将蝴蝶定理中的圆换成任意圆锥曲线（椭圆、双曲线、抛物线）命题仍然能成立。

在几何学中，有许多形状优美的几何名题因篇幅所限不能一一介绍。仅从以上介绍的三个定理使我们感到，不仅仅文学、音乐、美术、戏剧、电影、电视等能给人以美感，在数学里面，面对这些优美的图形和它们证明的过程中，都能给人以愉悦、以惊奇、以赞叹、以振奋、以满足、以陶醉。这实际就是一种审美感受。

每一道几何名题就是一件精美的艺术品。