22 只用圆规或直尺作图的巧思

所谓“几何作图三大难题”，其所以“难”，只不过是因为受到作图工具的限制（只许用圆规和直尺）所致。如果取消这种限制，则所谓的“几何作图难题”都可以作出，也就不难了。两千多年来，人们沿袭欧几里得只许用圆规和直尺的规定来作几何图形，这本来就相当苛刻了，更有甚者，有人竟提出，只用圆规或仅用直尺作图，并对此进行了研究。

22.1 仅用圆规的作图

意大利数学家马索若尼连直尺也可以去掉，他巧妙地证明了凡用圆规和直尺所能作出的图形，仅用圆规也同样可以作出。他把自己的研究成果，写成了《圆规几何学》的专著（据说比马索若尼早一个世纪的丹麦数学家海尔姆斯列夫在其《欧几里得作图》一书中，已经包含了《圆规几何学》中的成果）。

因为仅用圆规的作图无法画出直线，因此在这里约定：一条直线只要它上面的两个点已知，就算这条直线已被确定了。

1. 问题的解决

要仅用圆规来代替圆规和直尺的作图，必须让圆规完成以下两件事：

（1）求已知两个点的一条直线与一个已知圆的交点；

（2）求各已知两个点的两条直线的交点。

对于第（1）件事又分：

如果已知圆的圆心 O 不在直线 AB 上时，如图 22-1：可以点 A 为圆心，以 AO 为半径画弧，再以点 B 为圆心，以 BO 为半径画弧，二弧相交于另一个点 O'，再以 O' 为圆心，作一与圆 O 等半径的圆，二圆相交于 C、D 即为所求的两个交点。

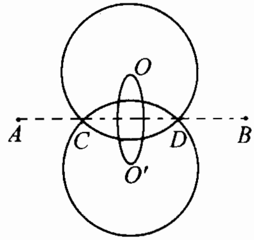

图 22-1

如果已知圆的圆心 O 在直线 AB 上时，请读者自行找出直线与圆的两个交点。

对于第（2）件事，完成也不困难，但因篇幅所限，留给读者去思考，对此训练一下自己的作图技巧。

这两项本来是由直尺完成的基本作图，现已由圆规独立完成了，从而仅用圆规可代替要用圆规和直尺同时完成的作图了。这种别具一格的作图虽然过程很繁琐，实际意义不大，但却充分显示了圆规这个作图工具比直尺更为灵巧。它的大量精妙的作图方法闪烁着人类智慧的光辉，有助于丰富人们的思维。因此，它仍不失为数学园地中的一枝奇葩。

2. 拿破仑分圆问题

法国大革命时期的风云人物拿破仑，在他南征北战、日理万机的情况下，仍旧对平面几何颇感兴趣，并抽出一些时间来研究，他曾读过《圆规几何学》一书，兴奋之余，给法国的数学家出了一道题目："把一个圆四等分，但不准用直尺。"

他自己也研究过并较圆满地解决了这个问题：如图 22-2，在圆上任取一点 A，从 A 出发，以此圆的半径 r 顺次截取 B、C、D 三点，则 AD 显然是圆的直径，而 AC 是圆的内接正三

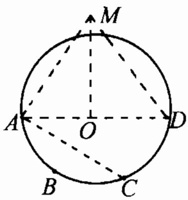

图 22-2

角形的一边，所以 $AC=\sqrt{3}r$，再分别以 A、D 为圆心，以 AC 为半径画弧，两弧相交于 M，则线段 OM 之长即为圆的内接正方形的边长。故在圆上可从任意一点出发，相继截取 OM 之长，则可将圆周四等分了。

这是因为，在 Rt$\triangle MAO$ 中：$OM=\sqrt{AM^2-AO^2}=\sqrt{3r^2-r^2}=\sqrt{2}r$，$\sqrt{2}r$ 就是圆内接正方形的边长。

3．生锈圆规

美国几何学家、年逾七旬的老教授佩多，敏锐地看出：固定圆规半径的作图题，可能隐藏着有趣的奥妙，他把这种固定半径的圆规称为生锈圆规。佩多精心地选择了两个问题于1982年在加拿大的一份杂志上提出，征求解答：

（1）已知两点 A、B，只用一把生锈圆规找出以 AB 为边的正三角形的另一顶点 C；

（2）已知两点 A、B，只用一把生锈圆规找出 AB 中点 C。（应知，线段 AB 是没有画出来的，因为没有直尺！）

后来，事情的发展表明，正是由于这两个问题的解决，使生锈圆规的园地繁花怒放。不久，佩多的一个学生作出了一幅几何图，如图 22-3，解决了佩多第一个问题的一小部分：如果 $AB<2$，（生锈圆规的半径是 1），用生锈圆规可以作出 C，使 $\triangle ABC$ 为正三角形。

如图 22-3，以 A、B 为圆心，分别作圆使之相交于 D、G；又以 G 为圆心，作圆交圆 A、圆 B 于 E、F；再分别以 E、F 为圆心，作二圆相交于 C（另一点为 G），则$\triangle ABC$ 为

正三角形。证明是容易的：在圆 F 上，用圆周角定理$\angle GCB=\frac{1}{2}\angle GFB=30^\circ$，故$\angle ACB=60^\circ$，又显然有 $AC=AB$（注意：生锈圆规的半径为 1），所以$\triangle ABC$ 为正三角形。

那么当 $AB>2$ 时，圆 A 与圆 B 不再相交了，又怎么办呢？三年过去了，仍无进展。正当数学家们认为是“不可能”的作图时，却被三位中国数学工作者（中国科技大学教师）成功地作出了解答。如图 22-4，在 AB 较近处取一点 M（使 $AM<AB$，$BM<AB$），分别以 AM、BM 为边向外作正$\triangle AMD$、正$\triangle BME$，再找出 C 点使 $MECD$ 是平行四边形（具体如何找，还得费一番脑子呢！）那么$\triangle ABC$ 也是正三角形。

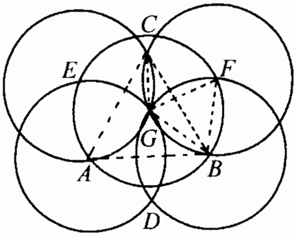

图 22-3

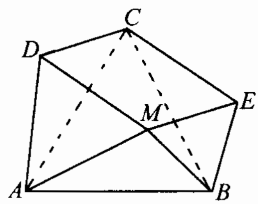

图 22-4

证明不难，留给读者去完成。

当佩多教授得知中国同行解决了他提出的第一个问题后，非常高兴。他希望他的第二个问题也能被解决。无独有偶，佩多教授的第二个问题被中国一个未考上大学的高中毕业生、山西自学青年侯晓荣予以解决了，且获得了比佩多教授提出的两个问题远为丰富的成果：一个生锈圆规可以作出以 AB 为边的正三角形、正六边形、正五边形、正八边形、正十七边形；用它也可以找出 AB 的三等分点、五等分点、任意等分点。总之，直尺和圆规能作的图形，用生锈圆规都能作出。

22.2 仅用直尺的作图

1. 问题的提出

仅用圆规作图的成功，鼓舞着人们仅用直尺作图的探索。那么，单用直尺是否可以完成圆规和直尺所有的作图呢？难度显然是很大的，因为甚至像“把一条直线延长成它的2倍”、“找出一个未给出圆心的圆的圆心”这样简单的作图问题，只用直尺也是无能为力的。而用圆规作图就轻而易举了，其实也不足为奇，因直尺仅是半径为无限大的一种特殊的圆规。

2. 问题的解决

经瑞士数学家斯坦纳研究证明：任何一个可以用圆规直尺作出的图形（除圆弧外），如果在平面内给出一个有圆心的定圆，只用直尺便可以作出。这个令人惊异的结论的证明，充分体现了斯坦纳超人一等的才智。他十分巧妙地将尺规作图的问题转化成在平面直角坐标系内只用直尺如何作点的问题。因为，要完成任何一个尺规作图的任务，只要完成下面四种作图就行了：

(1) 能作出直角坐标系，确定点 (0, 0)、(1, 0)、(0, 1)。

(2) 将点投影到坐标轴上。

(3) 由点 $(a, 0)$ 作出点 $(0, a)$，或反过来由点 $(0, a)$ 作出点 $(a, 0)$。

(4) 对任意给出的两个点 $(a, 0)$ 和 $(0, b)$，能作出 $(a\pm b, 0)$，$(ab, 0)$；当 $b\neq 0$ 时，能作出 $\left(\frac{a}{b}, 0\right)$；当 $a\geqslant 0$ 时，能作出 $(\sqrt{a}, 0)$。

在已知一个圆和它的圆心的条件下，斯坦纳证明了上面四个作图任务都可以只用直尺完成。他还给出了完成每个任务的巧妙方法。

3. 几个直尺基本作图

下面介绍几个仅用直尺便可完成的基本作图，证明就留给读者去完成。

（1）已知直线 l 与线段 AB 平行，试只用直尺作出 AB 的中点。

作法如下：如图 22-5，在直线 l 和 AB 以外任取一个点 E，连接 EA，EB，分别与 l 交于 M、N，连接 MB、NA 交于 D，再连接 ED 并延长交 AB 于 C，则 C 就是线段 AB 的中点。

（2）已知直线 $m /\!/ l$，A 是不在直线 m、l 上的一点，试只用直尺过 A 作 l 的平行线。

作法如下：如图 22-6，在 l 上任取两点 M、N，按图 22-5作出 MN 的中点 C，连接 AM、AN，在 AM 的延长线上取一点 E，连接 EC 与 AN 相交于 D，连接 MD、EN 并延长相交于 B，则 $AB /\!/ l$。

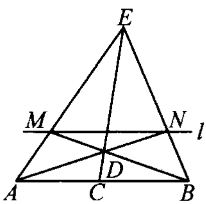

图 22-5

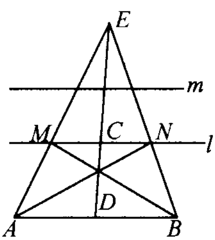

图 22-6

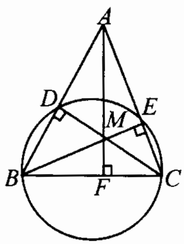

图 22-7

(3) 已知 BC 是圆的直径，A 是 BC 外的一点，试只用直尺过 A 作 BC 的垂线。

作法如下：如图 22-7，设 A 在圆外，连接 AB、AC，分别交圆于 D、E，又连接 CD、BE，设交点为 M，连接 AM 并延长交 BC 于 F，则 $AF \perp BC$。

请读者自行完成点 A 在圆内时的作图的证明。

4．证明的完成

(因篇幅所限，仅说明 2．中提到的 (1)、(2) 两种作图)

如图 22-8，过已知圆 O 的圆心任作两条直径 AC、BD，则 $ABCD$ 是一个矩形。利用 $CD \parallel AB$，按图 22-8 的方法就可过 O 作 x 轴 $\parallel AB$；同理可过 O 作 y 轴 $\parallel BC$。令 O、E、F 点的坐标分别为 $(0,\ 0)$、$(0,\ 1)$、$(1,\ 0)$，就完成了 3．中 (1) 的作图；若已知点 P 的坐标为 $(a,\ 0)$ 时，只需过 P 作 $PQ \parallel EF$，且 PQ 交 y 轴于 Q 点，则点 Q 的坐标为 $(0,\ a)$。

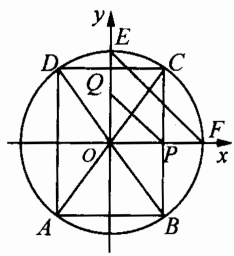

图 22-8

虽然斯坦纳从理论上保证了只用直尺作图的可能性，但谁也不愿意如此繁琐地去作图，然而，使人看到的是数学家的智慧，如何使笨拙的直尺变得灵巧，使得看来难于完成的作图是如何奇迹般地得以实现。