

18 河图与洛书的数学内涵

18.1 河图、洛书的传说

在我国古老的著作《易经系辞传》中有一句话是：“河出图，洛出书，圣人则之。”这里的圣人指的是伏羲氏。到了北宋时代就编造出了一个神话：

在伏羲氏时代，从黄河跳出一匹龙马，背上有一幅图。这幅图隐含着很多天机。上面有黑白点（圈）55个，用直线连接成10个数，被称为“河图”（如图18-1）。根据河图伏羲氏才画出了八卦；又在夏禹治水的时候，洛水里出现了一只大乌龟，其背上有文字。上面有黑白圈45个，用直线连成9个数，称为“洛书”（如图18-2）。

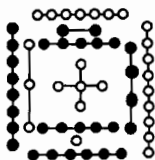


图 18-1 河图

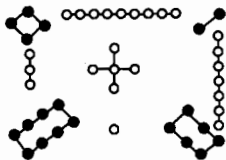


图 18-2 洛书

也有传说认为“河图”就是“周易”的来源；而“洛书”就是天帝赐给大禹治水用的《洪范九畴》。《汉书·五行志》载：“刘歆以为伏羲氏系天而王，河出图，则而画之，八卦是也；禹治洪水，赐洛书，法而阵之，洪范是也。”

还有传说认为神龟负文而出，列于背，有数从一而至九。这个传说倒是值得重视的。甲骨文的发现，可以说明“龟背刻

字”并非虚妄。这样，刻着图形数字的龟背浮在水面上被人拾到，也是有可能的。

18.2 河图、洛书的数学内涵

河图中的黑圆点表示阴数，阴数皆为偶数；白圆点表示阳数，阳数皆为奇数。图中数字共分三层：最外层四数之和为30；中层四数之和为10；内层三数之和为15。三层数相加得55。30、10、15均为5的倍数，说明以5为中心。图中1至9除了5之外都是不重复的数，只有5例外，共有三个5。如果把其中两个5合并为10，也即1至10的和是：

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55$$

这是等差数列前 n 项和的最典型例子。

洛书是把一至九这9个数字摆成方阵，而以五为中心。对洛书的解释为形如图18-3的三阶方阵，南宋数学家称此图为“纵横图”，又称“九宫图”。此图中任意一行、任意一列以及两条对角线的数字之和都是15。这种纵横图是世界上最早的矩阵，又称方阵或幻方。它的研究属于一个数学分支——组合数学。欧洲人直到14世纪才开始研究幻方，比我国迟了近两千年。

那么这种幻方是怎样构造出来的呢？

1275年南宋数学家杨辉在《续古摘奇算法》中谈到了洛书的构造法：“九子斜排，上下对易，左右相更，四维挺出。载九履一，左三右七，二四为肩，六八为足也。”即先把1, 2, 3, …, 9这9个数排成如图18-4的斜直线

四	九	二
三	五	七
八	一	六

图 18-3 九宫图

三排，然后上下对易，左右相更而构成洛书（如图 18-5）。

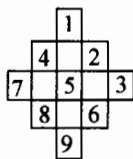


图 18-4

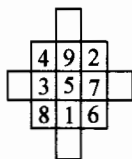


图 18-5

河图、洛书是我国数学发展的标志，说明当时我国对组合数学思想已经有了认识。杨辉在《续古摘奇算法》一书中，进一步构造出了 4~10 阶方阵。实际上，若设方阵的阶数为 n ，各行、各列、各条对角线上所有数字的和为 P_n ，则有公式

$$P_n = \frac{n(n^2 + 1)}{2}$$

我国发现了方阵后，曾传到国外，引起了国内外的数学爱好者的兴趣。据说现在美国有一个 13 岁的少年已经排出了 105 行 105 列的方阵，即 105 阶的幻方。

18.3 河图、洛书的现代解释

内蒙古哲里木畜牧学院物理教师韩永贤经过 50 年的潜心研究，于 1988 年在《内蒙古社会科学》上发表了论文《无文字时代的两大发明——揭开河图、洛书千古之谜》。该文章首次破译河图、洛书，认为伏羲确有其人。河图是游牧时期的气象图，洛书是当时的一张方位图。图中的圆点表示雨点、雨量，圆圈表示太阳、干燥。韩永贤的论文，在国内外引起了强烈的反响。英国皇家科学院中国自然学史专家李约瑟来电：“河、洛一文很有价值。现已藏于剑桥东亚科学史图书馆。美国麻省理工学院高秉浩博士亦备加赞赏。”

18.4 河图、洛书的美学意义

河图、洛书实际是组合数学的雏形。洛书便是一个三阶方阵（西方称之为“幻方”），它的各行、各列及对角线上三数之和皆为 15。而对于 n 行、 n 列及对角线也具有此性质的幻方，称之为“ n 阶幻方”。幻方曾使大数学家欧拉、著名物理学家富兰克林很感兴趣。

河图、洛书皆是以“五”为中心，古人有“五瓣梅花天地方”之句，正包含了这样的意思。八卦云：“天数五，地数五，五位相得而各有合。天数二十五，地数三十，凡天地之数五十有五，此所以成变化而行鬼神也。”

美国 1977 年发射的寻求外星文明的宇宙飞船旅行者 1 号、2 号上，除了有向宇宙人致意的问候信号外，还带有一些图片。这些图片中，就有一张是四阶幻方图（如图 18-6）。

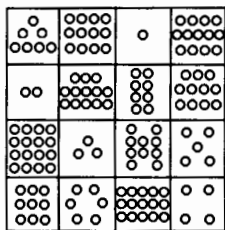


图 18-6

从数学美的角度来看，由于河图所进行的数字排列，使得对这些数进行简单的数学运算，例如加法、减法、乘法、数列运算，得到了各种结果，这些结果都包含了一定的规律性。对河图的数学研究，不但是—种思维体操，而且有着强烈的数学美感。电子计算机出现以后，古老的河图、洛书中所包含的数学美学原理，在程序设计、实验设计和图论方面得到了应用和发展。