17 突破视觉与习惯思维的误区

17.1 视觉的迷惑

人的视力是有限的，仅凭眼睛的直觉判断有时会使我们得出与事实不符的错误结论。

请看下面的几个例子：

(1) 图 17-1 中两根弧线哪根长？看起来下面的弧形线要比上面的弧形线长，其实它们一样长。

(2) 图 17-2 中您认为哪个是正方形？看起来似乎左边的一个是正方形。事实上，如果您量一下，便知右边的一个才是正方形。

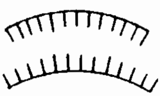

图 17-1

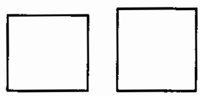

图 17-2

(3) 在图 17-3 的平行四边形中，线段 AE 与 BE 哪一条长一些？其实 AE 与 BE 一样长。

(4) 图 17-4 中 AB、CD、EF、GH 是四条平行线，但看起来似乎是不平行的，这是由于背景斜线干扰的结果。

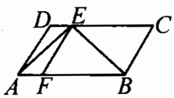

图 17-3

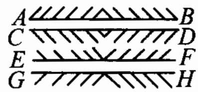

图 17-4

(5) 图 17-5 中看得见的小正方体，有人说 10 个，有人说 12 个，您认为到底有几个？

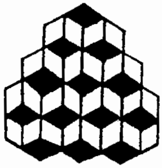

图 17-5

图 17-6

(6) 图 17-6 中，有人认为看到的是一个白色的杯子，而有人认为看到的是两个面孔相向的黑色人头侧影。图 17-6 被称为“鲁宾双关图形”，对我们的认识观察是很有启发性的。

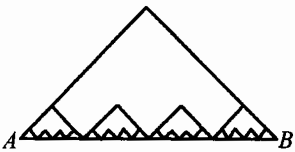

图 17-7

(7) 将长为 a 的线段 AB 分为 n 等份，分别以每段线段为斜边作 n 个等腰直角三角形（图 17-7），当 n 增大时，显然这 $2n$ 直角边所组成的折线将随之接近线段 AB。如果让 n 无限增大，凭眼睛看来，这条折线完全“重合”在线段 AB 上了，似乎折线的长也应等于 a。而事实上，因每个小的等腰直角三角形的斜边长都是 $\frac{a}{n}$，故每条直角边长都是 $\frac{a}{n}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}a}{2n}$，于是由 $2n$ 条直角边组成的折线的长为 $\frac{\sqrt{2}a}{2n}\cdot 2n=\sqrt{2}a$。也就是说，它的长与所分成的份数 n 没有关系，即使是 $n\to\infty$，折线与 AB“重合”时也是如此。从以上数例可看出，由于视觉误差给我们造成了一些判断上的误区。因而，由眼睛直觉得出的结论，不一定是完全可靠的。

17.2 突破习惯思维的束缚

有些问题用我们习惯思维的方式似乎是难以解决的，如果

我们能突破常规去思考，就能使思维“豁然开朗”，而使问题迎刃而解。请看下面的几个例子：

（1）6 根火柴不能交叉，将其组成 4 个正三角形。如果将 6 根火柴在平面上摆放，怎么也不能组成 4 个三角形。但若突破平面的限制，则 6 根火柴可作为一个正四面体的 6 条棱，组成 4 个三角形（如图17-8）。

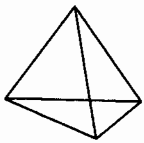

图 17-8

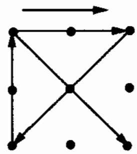

图 17-9

（2）图 17-9 中有 9 个点，试一笔画出 4 条直线，把这 9 个点连接起来（从何处起头都行，直线可以交叉，但不能重合）。

一笔画出 4 条直线，难以穿过 9 个点。这是由于我们不易想到将直线延伸到 9 个点的范围界限之外。如果能突破这种习惯思维方式的束缚，则如图 17-10 便可一笔画出 4 条直线使之通过这 9 个点。

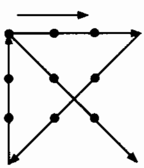

图 17-10

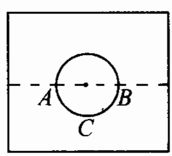

图 17-11

（3）我们在一张纸上，挖去一个直径为 2 厘米的圆（如图 17-11），并要让您将一块直径为 3 厘米的硬币穿过去。

看来似乎是不可能的。其实，我们只需将这张纸沿着圆的一条直径折起来（如图 17-12），再将半圆弧 *ACB* 拉直成线段

ACB（如图 17-13），则线段 ACB 的长为π 厘米，而 $\pi>3$，故可将直径为 3 厘米的硬币穿过去。

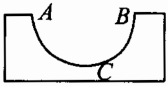

图 17-12

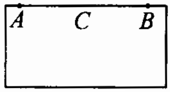

图 17-13

（4）请您在一个边长为 10 厘米的木制立方体上挖一个洞，让一个直径为 12 厘米的球通过。这个问题好像是“不可思议”的。在一个“小”立方体中怎么可以挖一个洞让一个“大”球通过呢？之所以我们认为不可能，就是习惯上认为球是从正方体的正前方向穿进而从正后方向穿出的，这当然是不可能的。但是，如果我们让球对着正方体的一个顶点穿过，让球心通过该顶点的一条对角线（如图 17-14），这样就有可能使正方体通过球了。那么正方体的边长 a 与球半径 r 需满足什么条件时，正方体才可使球通过呢？若将球与正方体投影到一个平面上（图 17-15），便可将其看成是一个平面问题。即当圆半径为 r，边长为 b 的正六边形需满足什么条件时，可以通过呢？

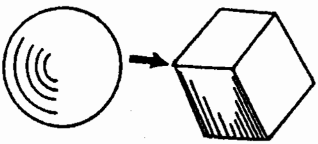

图 17-14

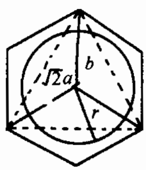

图 17-15

由图 17-15 可知，有$\sqrt{3}\,b=\sqrt{2}\,a$，则 r 需满足条件：$r=\frac{\sqrt{3}b}{2}=\frac{\sqrt{2}a}{2}\approx0.707a$，故当 $r<0.707a$ 时，便可在立方体上挖个洞让球通过。而今 $r=6$ 厘米，而 $0.707a=0.707$ 厘米，

故知球可穿过正方体。

由以上数例看出，由于突破了习惯思维方式的束缚而产生的奇思妙想，致使一些被认为“不可能解”的问题获解。可见“数学是锻炼思维的体操”，此话一点不假。