14 神秘的无穷多

14.1 出人意料的结论

我们知道全体整数有无穷多个，全体正整数也有无穷多个。如果有人问您："全体整数和全体正整数都有无穷多个，它们是不是一样多呢?"全体正整数只是全体整数的一部分，难道一部分和全体一样多吗?

事实上全体整数和全体正整数一样多，而且全体正整数和全体正偶数一样多，全体正整数与全体完全平方数也是一样多。

我们知道三角形中位线的长度是底边长度的一半，但是三角形中位线上的点却与底边上的点一样多。不仅如此，而且一条很短线上的点与一条无限长的线上的点也是一样多。更让人吃惊的是：一条只有一毫米（甚至更短些）长的线段上的点与整个空间所包含的点也是一样多。

对以上这些出人意料的结论，我们又怎样去理解呢?

14.2 问题解决的桥梁

初中学生都接触过"集合"的概念。我们称每一组确定对象的全体形成一个集合，集合里各个对象叫做集合的元素。由无穷多个元素组成的集合称为"无限集"。自然数集、正整数集、线段或直线所形成的点集等都是无限集。

要比较两个无限集的大小，也就是看这两个集合中的元素

哪个多?

虽然我们对两个无限集比较大小没有经验，但对有限集(由有限个元素组成的集合）比较大小却是有办法的——设法建立起两个集合间元素的“一一对应”关系，而我们比较两个无限集元素的多少的办法也只能如此：如果两个无限集的元素间能建立起某种“一一对应”关系，我们就说这两个无限集的元素“一样多”。即“一样多”的惟一意义是“可以一一对应”。有了这个定义，则对前面所提出的“出人意料”的结论便可迎刃而解了。

14.3 “出人意料”的结论的图示

现在将前面提出的几个“出人意料”的结论建立起“一一对应”的图示后，就可知道它们之间的元素是一样多了。

(1) 全体正整数和全体正偶数一样多。

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \cdots \end{array}$$

(2) 全体正整数与全体完全平方数一样多。

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 & \cdots \end{array}$$

(3) 全体正整数与全体整数一样多。

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & \cdots \end{array}$$

(4) 三角形中位线上的点与三角形底边上的点一样多（如

图 14-1)。

(5) 一条线段上点与一条直线上的点一样多 (如图 14-2)。

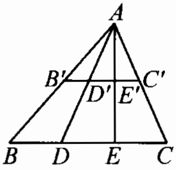

图 14-1

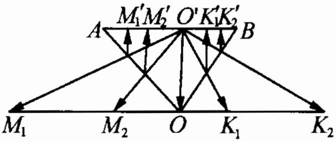

图 14-2

但要建立起一条线段上的点与全空间点的“一一对应”关系就比较复杂些了,在这里不再论述了。

14.4 希尔伯特的“无穷旅店”

大数学家希尔伯特在一次演讲中虚构了这样一个故事:

有一家旅店,设有无穷多个房间,假定每个房间只能住一人,所有的房间都住满了人。这时一位新旅客要一个房间。房主说:“不成问题。”他把这位旅客安排在 1 号房间,让 1 号房间的客人安排到 2 号,2 号房间的客人到 3 号,3 号房间的客人到 4 号,……这样就把新来的这位客人安排下了。

但严重的问题来了,一次来了一个“无穷旅行团”,它的成员个数与正整数一样多。这时,刚才的应急措施行不通了,怎么办呢?店主人又有了新招。他请 1 号房间的客人到 2 号,2 号的客人到 4 号,3 号的客人到 6 号,……这样所有的奇数号的房间都空出来了,正好安排给这个“无穷旅游团”的成员们住。

如果到了旅游旺季,来了无穷多个“无穷旅游团”,怎么办呢?店主人略加思索,又想出了一条妙计,把无穷多个“无

穷旅行团”成员都安排住下了。到底怎样安排下的？留给读者去想一想，当然这要费一番脑筋。

由以上这个虚构的故事，可以看出“无穷”的神奇之处。

14.5 所有的无穷都一样多吗

是否所有的无穷集合间的元素都能建立起“一一对应”的关系？也就是说所有的无穷都一样多吗？事实并非如此，如有理数与无理数都有无穷多个，但有理数与无理数就不一样多。

近代伟大的数学家和逻辑学家康托尔是闯入“无穷王国”的先锋。他所创立的集合论已被公认为现代数学的基础，他对“无穷”的研究在数学上和哲学上都有重大影响。他在 1874 年证明了“一条线段上的点要比正整数多”成为他对“无穷”研究最重要的贡献。

“无穷”是怎么回事？是两千年来哲学家一直谈论但又不清楚的事，但数学思维却进入了“无穷王国”。直至今天人们对“无穷多”的认识还是非常有限的。因为“无限集”与“有限集”有着本质的区别，所以“无限集”也有出乎我们意料、甚至与我们的“常识”相违背的性质。文章起始提出的一些结论和希尔伯特虚构的故事不就是例子吗？“无限”是一块“神秘”的宝地，有许多宝藏等待我们去发掘、开采。由有限到无限是人类认识的一次飞跃，但无限又要通过有限来体现，加以掌握。