13 从求正五角星形的内角谈起

我们常见到的五星红旗和八一军旗上的五角星形，不但给人以庄严的感觉，而且还给人一种和谐、对称、协调的美感，很容易想到它的一个内角是多少度？怎样计算？

如图 13-1，$ABCDE$ 是正五角星形，在$\triangle AFG$ 中：

$\angle AFG=\angle B+\angle D$，$\angle AGF=\angle C+\angle E$，于是$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E=180°$，$\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=\angle E=\dfrac{180°}{5}=36°$。

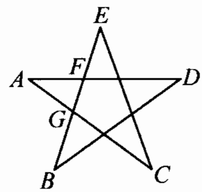

图 13-1

我们知道计算正 n 边形内角 α 的公式为

$$\alpha=\frac{180°\times(n-2)}{n} \tag{13.1}$$

当 $n=5/2$ 时，$\alpha=\dfrac{180°\left(\dfrac{5}{2}-2\right)}{\dfrac{5}{2}}=36°$，刚好也是36°，这是一种巧合吗？如果能由计算正 n 边形内角的公式（13.1）推出计算正 n 角星形的内角公式，则我们把正 n 角星形看成一种“特殊”的正 n 边形，如正五角星形看成是一个正 5/2 边形。

那么 5/2 是什么意思呢？

我们将圆周五等分，得五个分点 1、2、3、4、5，如果按 1→2→3→4→5→1 相连，则得一个正五边形（如图 13-2）。如果按 1→3→5→2→4→1 相连，则得一个正五角星形（如图 13-3）。

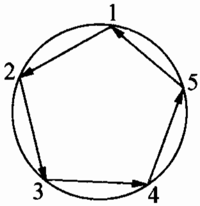

图 13-2

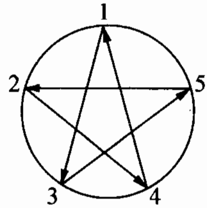

图 13-3

可以看出正五边形是将相邻的等分点相连而得，而正五角星形是将每隔一个等分点相连而得。故前者看成是 5/1 边形，后者可以看成是 5/2 边形。

推而广之，正 n/m（n，$m \in N$，$2 \leqslant m < n/2$）边形是将圆周 n 等分，将每隔 $m-1$ 个等分点相连而得的正 n 角星形。

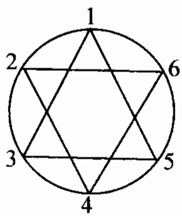

图 13-4

看正六角星形：是将圆周上的六个等分点 1、2、3、4、5、6 按 1→3→5→1，2→4→6→2 相连而得的图形(如图 13-4)。即每隔一个分点相连，故正六角星形可以看成是正 6/2 边形。因为 6/2 = 3，所以正六角星形的内角等于正三角形的内角为 60°。值得注意的是，不能因 6/2 = 3，而将正六角星形说成是正三角形，应看成正 6/2 边形。

再看正七角星形，将圆周七个等分点相连（除去相邻等分点相连)，有下列两种连法：

（1）按 1→3→5→7→2→4→6→1 相连（如图 13-5)；

（2）按 1→4→7→3→6→2→5→1 相连（如图 13-6)。我们可

将图 13-5 的正七角星形看成是 7/2 边形，其内角为 $\dfrac{180^\circ\left(\dfrac{7}{2}-2\right)}{\dfrac{7}{2}}=\dfrac{540^\circ}{7}$；而图 13-6 的正七角星形可看成是正 7/3 边形，其内角为 $\dfrac{180^\circ\left(\dfrac{7}{3}-2\right)}{\dfrac{7}{3}}=\dfrac{180^\circ}{7}$。

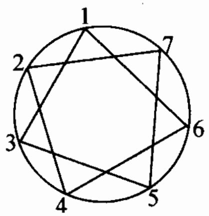

图 13-5

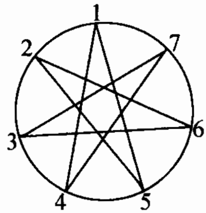

图 13-6

正八角星形也有两种形式（如图 13-7、图 13-8）。分别可以看成是 8/2 和 8/3 边形。

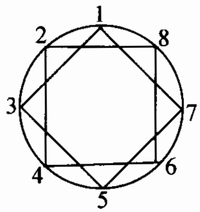

图 13-7

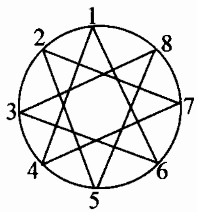

图 13-8

而正九角星形却有三种情形（如图 13-9、图 13-10、图 13-11）。它们分别可以看成是 9/2 边形、9/3 边形和 9/4 边形。

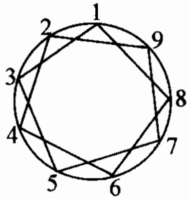

图 13-9

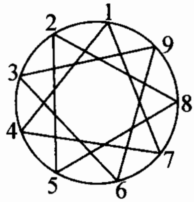

图 13-10

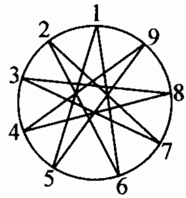

图 13-11

由以上的作图可以看出正 5/2 边形、正 7/2 边形、正 7/3 边形、正 8/3 边形、正 9/2 边形、正 9/4 边形可以“一笔画”出；而正 6/2 边形、正 8/2 边形、正 9/3 边形却不可以“一笔画”出。

推广到正 n 角星形，可得如下结论：

（1）正 n 角星形可称为正 n/m（n、$m \in N$，且 $2 \leqslant m < n/2$）边形。

（2）求正 n 角星形（即正 n/m 边形）内角，可用正 n 边形内角公式（13.1）（即用 n/m 代（13.1）中的 n）求之。

（3）正 n 角星形（即正 n/m 边形）可有 m 种形式（$m \in N$，且 $2 \leqslant m < n/2$）。

（4）在 n/m 中，当 m 与 n 互质时，正 n 角星形可以“一笔画”出。

（5）在 n/m 中，当 m 与 n 不互质时，正 n 角星形不可以“一笔画”出。

上面提供了一个发现和总结规律的思维过程，从中体验到一种数学和谐美和一种收获的愉悦。至于正 n 角星形与正 n 边形间的边长有什么关系？面积间有什么关系？可留给有兴趣的读者去思考、去发现、去总结。