# 12 让您开窍的数学题

有一些较为繁难的问题，如果换一个角度去观察，换一种方法去处理，就会变得出人意料的简单。而这种角度、方法的转换，却闪耀着一种智慧之光，使人的思维开窍，获得智慧的启迪。下面谈谈对几个问题的处理方法：

## 12.1 鸡兔同笼问题

鸡兔共有 17 个头，50 只脚，问有多少只鸡？多少只兔？

这是一道在小学就做过的题。其思考过程是：如果 17 只都是鸡，应当有 34 只脚，现有 50 只脚，比 34 只多了 16 只，是因为有兔。有一只兔，则多两只脚，现在多了 16 只脚，当然是有兔 8 只了。因此，知有鸡 9 只，兔 8 只。

如果是初中生，则用列方程求解很容易。

设鸡 $x$ 只，兔 $y$ 只，则由题意，得

$$\begin{cases} x+y=17 \\ 2x+4y=50 \end{cases}$$

解得 $x=9$，$y=8$。

如果我们“别出心裁”，发“奇思”：令鸡将一只脚抬起，令兔将二前足抬起，则鸡、兔头数不变，而立在地上的脚却减少了一半，为 25 只。因一只鸡是一只脚立地，一只兔是两只脚立地，故知兔数为 $25-17=8$，鸡数为 9。这种“别出心裁”的思考，源于什么呢？如果我们回到小学的思考过程可得公式

$$兔数=\frac{脚数-2\times头数}{2}=\frac{脚数}{2}-头数$$

可见，这种“别出心裁”的“奇想”是脱胎于小学的原始思考方法。这难道不应引起我们进一步思考吗?

## 12.2 猴子分桃问题

1979年春，诺贝尔奖获得者、美籍物理学家李政道在和中国科技大学少年班的同学座谈时，向他们提出了这样一个问题：

这里有一大堆桃子为5个猴子所共有，它们要平均分配。第一只猴子来，它左等右等别的猴子都未来，便动手把桃子分成5堆，还剩下1个，它觉得自己太辛苦了，便当之无愧地把剩下的一个桃子吃掉，又拿走了5堆中的1堆；第二只猴子来，它不知道刚才发生的情况，又把桃子分成5堆，还是多了1个，它也吃掉了这1个，将1堆拿走了。以后，每只猴子来了，都是如此办理。请问：原来至少有多少桃子，最后至少剩多少桃子?

此题一般的解法是：

设原有桃子 $x$ 个，最后剩下 $y$ 个，那么每一个猴子连吃带拿得到的桃子分别为：

第一只猴子得到$\frac{x-1}{5}+1$，

剩下 $x-\left(\frac{x-1}{5}+1\right)=\frac{4(x-1)}{5}$个；

第二只猴子得到$\frac{\frac{4(x-1)}{5}-1}{5}+1$，

剩下 $x-\left[\frac{\frac{4(x-1)}{5}-1}{5}+1\right]=\frac{4\left[\frac{4(x-1)}{5}-1\right]}{5}$个；

第三只猴子又从剩下的$\frac{4\left[\frac{4(x-1)}{5}-1\right]}{5}$个中吃掉 1 个，又拿走$\frac{4}{5}$。

由此知，当第五只猴子来过后，已对 $x$ 进行了 5 次这样的减 1 剩$\frac{4}{5}$了，这样 5 次后便得

$$y=\frac{4}{5}\left\{\frac{4}{5}\left[\frac{4}{5}\left[\frac{4}{5}\left[\frac{4}{5}(x-1)-1\right]-1\right]-1\right]-1\right\}$$

$$=\frac{1024(x+4)}{3125}-4$$

即 $$y+4=\frac{1024(x+4)}{3125}=\frac{4^5(x+4)}{5^5}$$

因为 $x$，$y$ 都是正整数，而 $4^5$ 与 $5^5$ 的公约数为 1，又因为 $y+4$ 是正整数，所以 $x+4$ 一定能被 $5^5$ 整除。这样，可知 $x$ 至少是 $5^5-4=3121$，而 $y$ 至少是 $4^5-4=1020$。

结果虽然出来了，但运算却很繁琐。如果我们能开动脑筋，可得到一种只需用到一点算术知识的方法：

不妨先借给猴子 4 个桃，这不就可以将桃分成 5 堆了嘛。这样：

第一只猴子拿走的 1 堆桃子数，恰好为原来没借给它们时连吃带拿的桃子数；

第二只猴子来时，剩下的桃子仍是多了 5 个，又正好可分成 5 堆。所以，第二只猴子拿到的桃子数也仍与原来连吃带拿一样多；

第三、第四、第五只猴子所得的桃子数与原来也是一样。即每只猴子都拿走当时桃子的$\frac{1}{5}$，剩下$\frac{4}{5}$。而开始有桃子 $x+$

4个，这样到最后，便剩下$\frac{4^5(x+4)}{5^5}$个桃子，比原来$y$个多4个，于是得$y+4=\frac{4^5(x+4)}{5^5}$，这和前面的结果是一样的。

从对上面两道题的“奇思妙想”的解法中，您一定可以从中感受到数学的美妙和学习数学也是一件有趣的事!