◎第七章

进一步的“幻中之幻”

人们认识事物，总是由简到繁，由表及里；人们探索自然和科学中的奥秘，也总是由浅到深，由低级到高级。对幻方的认识和研究也是这样。在第四章中，我们介绍了一些“幻中之幻”，是在普通幻方的基础上，加入了一些新的特性，如对称幻方，泛对角线幻方，以棋步形成的幻方等等。这一章，我们要进一步介绍一些“幻中之幻”，其复杂程度要比第四章中的幻方高出许多。

7.1 双幻方

双幻方（bi-magic square，或 doubly magic square）有两种含义，一种是指某个幻方既是加幻方，又是乘幻方，具有“双重国籍”；另一种是指幻方中的数按行、列、2 条对角线相加都相等，而把这些数都取平方以后再按行、列、2 条对角线相加仍然都相等，即幻方背后隐藏着又一个幻方。前一种含意的一个双幻方如图 7-1 (a)所示，它既是一个幻和为 840 的加法幻方，同时又是一个幻方常数为 2 058 068 231 856 000 的乘法幻方。后一种含意的双幻方如图 7-1 (b)，表层幻和为 260，深层幻和为 11 180。后一种含意的双幻方首先是柯科斯(M.Coccoz) 于 1897 年发现的，引起众多数学家的兴趣。到 1901 年，赖利(A.Rilly)已给出 200 多个双幻方，且证明 8 阶以下不可能有这样的双幻方。但图 7-1 (b)中的 8 阶双幻方是

肖茨（M.H.Schots）发现的。图 7-2 中我们给出又一个双幻方是由杜德尼发现的，其表层的幻和也是 260，它的每一个数取平方后所形成的深层幻方的幻和也为 11 180。但值得注意的是，这个幻方中的 16 个 2×2 小方阵中，两对角线上数字之和均为 65，因此还是一个半泛对角线幻方，而且这 16 个小方阵 4 数之和也都相等。但它不是个对称幻方，因此可称之为“几乎最完美的幻方”（almost most perfect magic square）的双幻方。

46	81	117	102	15	76	200	203
19	60	232	175	54	69	153	78
216	161	17	52	171	90	58	75
135	114	50	87	184	189	13	68
150	261	45	38	91	136	92	27
119	104	108	23	174	225	57	30
116	25	133	120	51	26	162	207
39	34	138	243	100	29	105	152

(a)

16	41	36	5	27	62	55	18
26	63	54	19	13	44	33	8
1	40	45	12	22	51	58	31
23	50	59	30	4	37	48	9
38	3	10	47	49	24	29	60
52	21	32	57	39	2	11	46
43	14	7	34	64	25	20	53
61	28	17	56	42	15	6	35

(b)

图 7-1　双幻方的两种含意

7	53	41	27	2	52	48	30
12	58	38	24	13	63	35	17
51	1	29	47	54	8	28	42
64	14	18	36	57	11	23	37
25	43	55	5	32	46	50	4
22	40	60	10	19	33	61	15
45	31	3	49	44	26	6	56
34	20	16	62	39	21	9	59

图 7-2　杜德尼的双幻方

图 7-3 给出了一个 9 阶对称的双幻方，是由希思(R. V. Heath)发现的。其表层幻方的幻和是 369，而深层幻方的幻和是 20 049。图 7-3 中这个幻方中的数是以 9 进制形式给出的，这样，这个幻方同时也是一个拉丁方(Latin square)，即所有行、列、2 条主对角线上的“个位数”和“十位数”位置上都不重复地同时出现 0～8 这 9 个数字。读者当不难把它恢复为十进制形式的数。

76	82	64	15	27	00	41	53	38
11	23	08	46	52	34	75	87	60
45	57	30	71	83	68	16	22	04
62	74	86	07	10	25	33	48	51
03	18	21	32	44	56	67	70	85
37	40	55	63	78	81	02	14	26
84	66	72	20	05	17	58	31	43
28	01	13	54	36	42	80	65	77
50	35	47	88	61	73	24	06	12

图 7-3　9 阶对称双幻方

在双幻方的基础上，人们以后又进一步发现了“三次幻方”(trebly-magic square)，即幻方中的数不但取平方后仍为幻方，取立方后也仍然是幻方。这样，在一个幻方背后，竟然还隐藏着 2 个进一步的幻方！构成这样的幻方当然十分困难。学术界原先认为三次幻方的阶不可能低于 64。但后来陆续有人构造出了 32 阶以至 16 阶的三次幻方。目前这方面的世界记录是中国学者创造的：2003 年 2 月，延安教育学院的高治源和西藏地质调查院的潘凤雏合作，一举编出 2 个 12 阶三次幻方！我们这里给出其中的一个，见图 7-4。这个幻方的幻和为 870；各数取平方后的幻和为 83810；各数取立方后的幻和为 9082800。

18	6	34	65	105	53	92	40	80	111	139	127
17	20	63	94	31	120	25	114	51	82	125	128
79	41	22	144	33	83	62	112	1	123	104	66
19	86	76	23	142	78	67	3	122	69	59	126
46	91	117	13	68	134	11	77	132	28	54	99
102	49	8	71	106	133	12	39	74	137	96	43
129	116	98	87	84	7	138	61	58	47	29	16
52	115	119	136	45	38	107	100	9	26	30	93
131	48	141	70	35	88	57	110	75	4	97	14
113	121	64	72	2	36	109	143	73	81	24	32
108	42	101	5	124	85	60	21	140	44	103	37
56	135	27	90	95	15	130	50	55	118	10	89

图 7-4　中国学者创造的 12 阶三次幻方

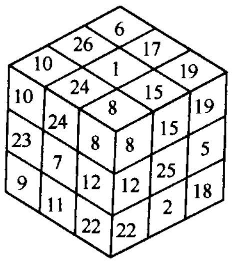
7.2 幻立方（魔方）

20 世纪 70 年代末、80 年代初，全世界曾经风行一种由匈牙利学者发明的智力玩具叫魔方，它是由 3×3×3 个小方块组合在一起但能各个方向转动的立方体，每个小立方体表面涂以不同颜色，要求把大立方体的 6 个表面都转成同一颜色。我们这里的魔方或叫幻立方是指 $n\times n\times n$ 的 3 维幻方，其 n^2 个行（row），n^2 个列（column），n^2 个纵列（pillar 或 file）以及 4 条空间对角线上的 n 个数之和都相等，这叫基本魔方或叫“半完美魔方”（semiperfect magic cube）；如果 3 个方向上的每个横截面本身就都是幻方，即不但行、列上 n 个数之和等于幻和，其 2 条主对角线也都等于幻和，那么就叫“完美魔方”（perfect magic cube）。显然，不管是半完美的还是完美的，

魔方的幻和应等于$\frac{1}{2}n(n^3+1)$；半完美魔方中有$3n$个平面半幻方，满足幻和的n数之和有$3n^2+4$组，完美魔方则有3（$n+2$)个平面幻方（除了水平、垂直、纵切3个方向上各有n个外，通过立方体每一对相对边的截面也是一个幻方)，满足幻和的n数之和有$3n^2+6n+4$或$3n(n+2)+4$。

可以证明，不管是半完美的还是完美的魔方，对于单偶阶即阶$n=2(2m+1)$形式的情况是不存在的，而对奇数阶及双偶数阶（$n=2\cdot 2m$)，人们已经找出了构造的方法，而且从数学上给予了一般的证明。由于比较繁复，我们这里就不介绍了，有兴趣的读者可参阅鲍尔的娱乐数学名著(W.W.R.Ball：Mathematical Recreations and Essays，London：Macmillan & Co.，1956，P.217～221)。下面我们由低阶到高阶介绍几个有趣的魔方。

图7-5是一个最简单的3阶基本魔方，幻和为42，共31组。图中把魔方分解成顶层、中间层和底层3层展示。已经证明，构成3阶和4阶完美魔方是不可能的。



10	24	8
23	7	12
9	11	22

26	1	15
3	14	25
13	27	2

6	17	19
16	21	5
20	4	18

图7-5　3阶基本魔方

3阶魔方不可能是完美的可用反证法证明如下：设有3阶完美魔方，取平行于该立方体表面的任一方阵，设它的第一行

中的3个数是A、B、C，第三行中的3个数是D、E、F，第二行中间的一个数是X。因为3阶魔方的幻和为42，它又是完美的，所以必有以下等式

$$A+B+C=42$$

$$D+E+F=42$$

$$(A+X+F)+(C+X+D)+(B+X+E)=3\times 42$$

$$\therefore\quad 3X+(A+B+C)+(D+E+F)=3\times 42$$

由此，$3X=42$，$X=14$

注意，我们以上的讨论是针对魔方中的任意一个截面进行的，因此结论适用于魔方中的任意截面，也就是说，魔方中任意截面的正中元素都应取值14。但按规定，魔方中任意一个数都不能重复出现，这就证明了3阶完美魔方是不可能存在的。

图7-6是一个4阶基本魔方，幻和为130。它虽然不是一个完美魔方，却是一个泛对角线魔方（pan-diagonal magic cube)，因为它不但有基本魔方的$3\cdot 4^3+4=196$个行、列、纵列、对角线等于幻和，还有一批空间的折对角线（space broken diagonal）上4数之和也等于幻和。对于4阶魔方的情况，空间折对角线的形成有2种情况，一种是立方体的每个顶角同去掉这个顶角所在的3个方向上的3个层面后，留下的那个$3\times 3\times 3$的小立方体的4条对角线，形成4条空间折对角线。8个顶角共形成32条这样的空间折对角线。我们下面只给出其中的一组，其他7组读者可自行写出

(43，1，22，64)，(43，13，22，52)

(43，61，22，4)，(43，49，22，16)

60	37	12	21	7	26	55	42	57	40	9	24	6	27	54	43
13	20	61	36	50	47	2	31	16	17	64	33	51	46	3	30
56	41	8	25	11	22	59	38	53	44	5	28	10	23	58	39
1	32	49	48	62	35	14	19	4	29	52	45	63	34	15	18

图 7-6　4 阶泛对角线魔方

形成空间折对角线的另一种情况是：把 4×4×4 的立方体看成是由上下各 4 个 2×2×2 的小立方体组成的，上下左右前后相对的 2 个小立方体的每 2 条空间平行的对角线形成空间折对角线。这样就有 4×4＝16 条这样的空间折对角线。下面我们也只写出其中的一组，其他 3 组读者可自行写出

(54，33，11，32)，(43，64，22，1)

(30，9，35，56)，(3，24，62，41)

可以看出，第一种折对角线每一组中有 2 个数是相同的，而第二种折对角线中的数全是不同的。

为了使读者对空间折对角线的构成有一个比较具体的概念，我们把上述 4 阶泛对角线魔方画成立体形式如图 7-7（层面次序同图 7-5 有所不同）。类似于平面的泛对角线幻方，如果把相同的泛对角线魔方上下左右前后一个个排列起来，那么任取其中的 4×4×4 的立方体仍将是一个泛对角线魔方，任取一根长度为 4 的对角线其上数字和将等于幻和。

下面的图 7-8 给出的也是一个 4 阶的泛对角线魔方，但非常有趣的是，把立方体的Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ4 层分解成 4 面铺在一个平面上，它竟然形成一个 8 阶幻方！这个幻方还有一个特点，即间隔着在任意行、列、对角线上取 4 数之和都等于 4 阶幻方的幻和 130。这个 4 阶魔方优于前述 4 阶魔方：如图 7-8 的 4 个层面（即 8 阶幻方的上下左右 4 块）上，每

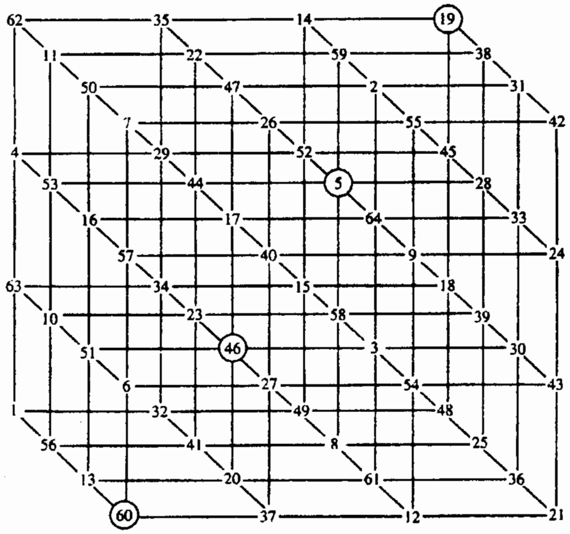


图 7-7　4 阶泛对角线魔方的立体示意图

个层面本身都是一个完整的4阶幻方，不但行和列，2条对角线上数字之和也都等于幻和，也就是说，作为同样的泛对角线魔方，这个魔方比前面那个魔方要多出 8 条等于幻和的直线，总数达到 252 条之多。这个魔方也是海斯发明的。

Ⅰ　　　　Ⅱ

1	8	61	60	48	41	20	21
62	59	2	7	19	22	47	42
52	53	16	9	29	28	33	40
15	10	51	54	34	39	30	27
32	25	36	37	49	56	13	12
35	38	31	26	14	11	50	55
45	44	17	24	4	5	64	57
18	23	46	43	63	58	3	6

Ⅳ　　　　Ⅲ

图 7-8　可以组成 4 阶魔方的 8 阶幻方

下面我们给出一个 7 阶的完美魔方如图 7-9。这个奇数阶的魔方是用类似于普通幻方的连续摆数法构成的，其普通向量是（1，−2），中断向量有 2 个，小中断向量用于确定在一个面上摆 7 个数以后如何转到下一面摆数，向量值为（2，0）；大中断向量用于确定在 7 个面上摆好 7×7＝49 个数以后如何转到下一轮的 49 个数，向量值为（0，1）。摆数过程中，设想行、列、面都是循环相接的。起始 1 置于中间一面（Ⅳ面）中间一列的最顶上一格以后，按普通向量（1，−2）在该面摆好 7 个数以后，按小中断向量（2，0）将 8 置于下一面（Ⅴ面）的第 5 列第 3 格（因为 7 在上一面的第 3 列第 3 格），开始下一组 7 个数的摆放。按上述办法摆好 49 个数以后，按大中断向量（0，1）将 50 置于Ⅲ面 49 的下方，开始下一轮的大循环，直至把 343 个数全部摆好，一个 7 阶的完美魔方就形成了。在这个完美魔方中，总共有 27 个 7 阶完全幻方，有 193 组 7 数之和为 1204。

从以上说明来看，奇数阶魔方的构成似乎不难。但对于偶数阶魔方，情形有所不同。比如图 7-10 所给出的 8 阶魔方，你能看出它是怎样构成的吗？8 阶魔方早在 1875 年就被发现了，但作者却没有留下姓名。这个图上的 8 阶魔方是 1970 年由賓夕法尼亚州当时年仅 16 岁的高中生迈尔斯（Myers）独立发现的。这个魔方有许多奇异的性质：

①它是对称的，即魔方中任意对中心对称位置上的 2 数之和均为 513。

②魔方中每条正交线和对角线上 8 数之和均为 2052。

③魔方 8 个顶角上 8 数之和也是 2052；且魔方内任意对中心对称的矩形体的 8 角上 8 数之和也是 2052。

Ⅰ

322	87	153	261	33	141	207
29	144	210	318	90	149	264
86	152	260	32	147	206	321
143	209	317	89	148	263	35
151	266	31	146	205	320	85
208	316	88	154	262	34	142
265	30	145	204	319	91	150

Ⅱ

100	215	323	95	161	269	41
157	272	37	103	211	326	98
214	329	94	160	268	40	99
271	36	102	217	325	97	156
328	93	159	267	39	105	213
42	101	216	324	96	155	270
92	158	273	38	104	212	327

Ⅲ

277	49	108	223	331	54	162
334	50	165	280	45	111	219
48	107	222	330	53	168	276
56	164	279	44	110	218	333
106	221	336	52	167	275	47
163	278	43	109	224	332	55
220	335	51	166	274	46	112

Ⅳ

62	170	285	1	116	231	339
119	227	342	58	173	281	4
169	284	7	115	230	338	61
226	341	57	172	287	3	118
283	6	114	229	337	60	175
340	63	171	286	2	117	225
5	113	228	343	59	174	282

Ⅴ

232	298	70	178	293	9	124
289	12	120	235	301	66	181
297	69	177	292	8	123	238
11	126	234	300	65	180	288
68	176	291	14	122	237	296
125	233	299	64	179	294	10
182	290	13	121	236	295	67

Ⅵ

17	132	240	306	71	186	252
74	189	248	20	128	243	302
131	239	305	77	185	251	16
188	247	19	127	242	308	73
245	304	76	184	250	15	130
246	18	133	241	307	72	187
303	75	183	249	21	129	244

Ⅶ

194	253	25	140	199	314	79
202	310	82	190	256	28	136
259	24	139	198	313	78	193
309	81	196	255	27	135	201
23	138	197	312	84	192	258
80	195	254	26	134	200	315
137	203	311	83	191	257	22

图 7-9　一个 7 阶完美魔方

I

19	497	255	285	432	78	324	162
303	205	451	33	148	370	128	414
336	174	420	66	243	273	31	509
116	402	160	382	463	45	291	193
486	8	266	236	89	443	181	343
218	316	54	472	357	135	393	107
185	347	85	439	262	232	490	12
389	103	361	139	58	476	214	312

II

134	360	106	396	313	219	469	55
442	92	342	184	5	487	233	267
473	59	309	215	102	392	138	364
229	263	9	491	346	188	438	88
371	145	415	125	208	302	36	450
79	429	163	321	500	18	288	254
48	462	196	290	403	113	383	157
276	242	512	30	175	333	67	417

III

306	212	478	64	141	367	97	387
14	496	226	260	433	83	349	191
109	399	129	355	466	52	318	224
337	179	445	95	238	272	2	484
199	293	43	457	380	154	408	118
507	25	279	245	72	422	172	330
412	122	376	150	39	453	203	297
168	326	76	426	283	249	503	21

IV

423	69	331	169	28	506	248	278
155	377	119	405	296	198	460	42
252	282	24	502	327	165	427	73
456	38	300	202	123	409	151	373
82	436	190	352	493	15	257	227
366	144	386	100	209	307	61	479
269	239	481	3	178	340	94	448
49	467	221	319	398	112	354	132

V

381	159	401	115	194	292	46	464
65	419	173	335	510	32	274	244
34	452	206	304	413	127	369	147
286	256	498	20	161	323	77	431
140	362	104	390	311	213	475	57
440	86	348	186	11	489	231	261
471	53	315	217	108	394	136	358
235	265	7	485	344	182	444	90

VI

492	10	264	230	87	437	187	345
216	310	60	474	363	137	391	101
183	341	91	441	268	234	488	6
395	105	359	133	56	470	220	314
29	511	241	275	418	68	334	176
289	195	461	47	158	384	114	404
322	164	430	80	253	287	17	499
126	416	146	372	449	35	301	207

VII

96	446	180	338	483	1	271	237
356	130	400	110	223	317	51	465
259	225	495	13	192	350	84	434
63	477	211	305	388	98	368	142
425	75	325	167	22	504	250	284
149	375	121	411	298	204	454	40
246	280	26	508	329	171	421	71
458	44	294	200	117	407	153	379

VIII

201	299	37	455	374	152	410	124
501	23	281	251	74	428	166	328
406	120	378	156	41	459	197	295
170	332	70	424	277	247	505	27
320	222	468	50	131	353	111	397
4	482	240	270	447	93	339	177
99	385	143	365	480	62	308	210
351	189	435	81	228	258	16	494

图 7-10　8 阶完美魔方

④整个魔方可分割成 64 个 2 阶的小立方体（2×2×2），每个小立方体内 8 数之和也是 2052。

⑤这个魔方中的数是从 1～512。如果从 513 开始，顺序取其后的 512 个数，按相同分布规律组成进一步的 63 个魔方，连同原始的魔方，可以构成一个 64 阶完满魔方。在此基础上，以相同方式又可构成 512 阶魔方。依此类推，可构成任意 8^n 阶魔方（$n=1$，2，3，…）。

7.3 四维魔方

幻方从平面的 2 维发展到立体的 3 维以后，没有停止脚步，继续向更高的维数进军。数学家约翰·亨德利克斯（John Robert Hendricks）先后开发出了 3 阶、4 阶甚至 16 阶的 4 维魔方（4D tesseract）。图 7-11 是其中“最简单”的一个 3 阶 4 维魔方投影到 2 维平面上的示意图，由图可见，4 维魔方由 8 个 3×3×3 的小立方体组成，在示意图中，正立方体被投影成立柱形式，正对着我们的 2 个立方体（以 1 和 50 以及 44 和 57 分别为前后 2 个左顶角）前后左右各有 1 个立方体，上下也各有 1 个立方体。每个立方体的上下、左右、前后 6 个外侧面分别同另外 1 个立方体所共有，因此共形成 16 个顶点，32 条边。除了每个立方体的所有行、列、纵列、4 条对角线都是幻和 123 之外，相对顶点之间有 8 条连线(这也叫对角线吧！但是是 4 维立方体的对角线)，它们是（1，81)，(42，40)，(61，21)，(50，32)，(44，38)，(73，9)，(14，68)，(57，25)。这 8 根对角线相交于 4 维立方体的中心，恰好是 1~81 的中心数 41，因此这些对角线上的 3 数之和也都是幻和 123。此外，4 维立方体的 32 条边两两相对的边的中点的连线也都

相交于4维立方体的中心，并形成幻和，如（72，10），（6，76），（56，26）等，共16组。

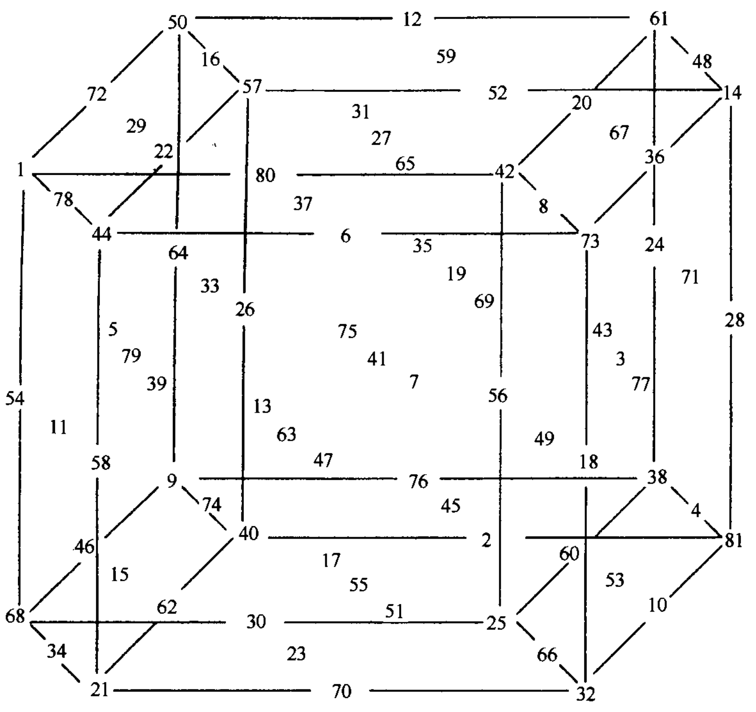


图 7-11　4维魔方

亨德里克斯证明，可以构成58个不同结构的3阶4维魔方。而4阶4维魔方还能构成“泛对角线”的，亨德利克斯自己就开发出了一个这样的泛对角线4阶4维魔方。

7.4 一些奇特的魔幻方

前面我们介绍了3维、4维的幻方，我们把它们叫做魔方。现在我们再回到2维的幻方，介绍一些令人匪夷所思的幻

方。为了强调其奇特，我们把它们叫做“魔幻方”。

首先一个魔幻方是“易位幻方”如图7-12（a）。这个幻方是一个非连续数4阶幻方，其幻和为242。如果你把这个幻方中所有数的个位与十位互易一下位置，例如96变成69，25变成52，如此等等，成为图7-12（b），你会惊奇地发现，它不但仍然是幻方，而且幻和也维持不变，仍然是242。你说奇特不奇特？这个幻方在西方被叫做“mirror magic square”，不知道是谁发明的。

96	64	37	45
39	43	98	62
84	76	25	57
23	59	82	78

（a）

69	46	73	54
93	34	89	26
48	67	52	75
32	95	28	87

（b）

图 7-12　易位幻方

下一个魔幻方是“颠倒幻方”，如图7-13（a），这也是一个4阶的非连续数幻方，其幻和为264。这个幻方中只用了4个数字，即1、6、8、9，把它们颠倒过来看，1与8仍为1与8，保持不变；而6与9则互易位置，即6成为9，9成为6。因此把整个幻方颠倒过来的话，就成为图7-13（b），令人惊奇的是，它也仍然是一个幻方，而且幻和同样是264！实际上，由于佚名作者的精心安排，正看和颠倒着看的这两个幻方中的16个元素完全是相同的，只是行、列位置发生了变动而已。除了这个令人惊叹不已的特性外，这2个幻方的对称性也非常好，除了行、列、2条主对角线上4元素之和为幻和外，它们的2条“2+2”形式的折对角线也等于幻和，此外，还有许多“四角方”也都等于幻和，如（61，88，99，16），（19，96，81，68），（86，69，18，91），（98，69，81，16）等。

19	61	88	96
98	86	69	11
66	18	91	89
81	99	16	68

(a)

89	91	66	18
68	16	81	99
11	69	98	86
96	88	19	61

(b)

图 7-13　颠倒幻方

以上 2 个魔幻方的发明者都已失传。下面介绍的第 3 个魔幻方幸好还留有发明人姓名，是阿根廷首都布宜诺斯艾利斯的罗道尔夫·库尔欣，他发明了一个“泛数字幻方”（pandigital magic square）。所谓泛数字幻方是指 n 阶方阵中的 n^2 个数，每个数都恰恰是由 0～9 这 10 个不同的数字所组成的 10 位数，而每行、每列、2 条主对角线上数字之和即幻和也是由 10 个不同的数字所组成的 10 位数。图 7-14 就是库尔欣所发明的泛数字 4 阶幻方。由图可见，幻方中的 10 位数的数字分布是很有规律的：前 2 位都是 10，其后的位顺次是 2 或 3，6 或 7，8 或 9，4 或 5，然后对称地又出现 6 或 7，2 或 3，8 或 9，4 或 5。通过巧妙的安排，使行、列、对角线上 10 数之和都相等，且和也是泛数字的 10 位数，即 4129607358，从 0 到 9 这 10 个数字都出现一次也只出现一次。库尔欣认为，他的这个 4 阶泛数字幻方是可能的泛数字幻方中阶数最小的，而其泛数字幻和（pandigital magic sum）也是可能的泛数字幻和中之最小者。

1037956284	1036947285	1027856394	1026847395
1026857394	1027846395	1036957284	1037946285
1036847295	1037856294	1026947385	1027956384
1027946385	1026957384	1037846295	1036857294

图 7-14　库尔欣的泛数字 4 阶幻方

我们最后要介绍的一个魔幻方如图 7-15（a）。读者看了这个图也许会说，这不是一个用典型的连续摆数法构成的普普通通的 5 阶幻方，同图 2-1 一模一样的吗？有什么奇特之处呢？是的，这是一个 5 阶幻方，表面上看并无奇特之处。但是美国明尼阿波利斯城有一个名叫洛贝克（T.E.Lobeck）的有心人在仔细研究了这个幻方以后，发现这个幻方同圆周率 π 存在着密切的关系！洛贝克把 5 阶幻方中的 1 到 25 分别用 π 中的第 1 位到第 25 位即 3.141592653589793238462643 代替，形成如图 7-15（b）的方阵，这个方阵不但 5 纵 5 横 5 数之和都是 17、23、24、25 和 29，它的 2 条对角线上数字之和 38 与 27 相加为 65，正好是 5 阶幻方的幻方常数！《物理科学和技术百科全书》（Encyclopedia of Physical Science and Technology，3rd edition，Academic Pr.，2002）认为洛贝克的这一发现是世间惊人巧合中最令人称奇的。然而无独有偶，帕佩斯（T.Pappas）在其所著《数学的乐趣》（The Joy of Mathematics，Wide World Pub.，1989）中介绍了幻方的又一个惊人巧合：如果用斐波那契数列中的 3、5、8、13、21、34、55、89、144 这 9 个数顺次代替洛书 3 阶幻方中的 1～9，那么所形成的 3 阶方阵如图 7-16（b）。这个方阵中 3 纵 3 横 3 个数的乘积之和竟然是相等的，即

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

(a)

2	4	3	6	9	24
6	5	2	7	3	23
1	9	9	4	2	25
3	8	8	6	4	29
5	3	3	1	5	17
17	29	25	24	23	

(b)

图 7-15　5 阶幻方和 π 的奇妙关系

8	1	6
3	5	7
4	9	2

(a)

89	3	34
8	21	55
13	144	5

(b)

图 7-16 洛书 3 阶幻方和斐波那契数的奇妙关系

$$(89\times3\times34)+(8\times21\times55)+(13\times144\times5)=26678$$

$$(89\times8\times13)+(3\times21\times144)+(34\times55\times5)=26678$$

幻方还有什么样的惊喜在等着我们，让我们拭目以待，更需要我们去亲自发掘！

习 题

对百变幻方的讨论到这里就结束了。大家可以看到，关于幻方还有许许多多未解之谜有待人们去探索，而我们的介绍也只是“沧海一粟”，不可能穷尽有关幻方的无数有趣问题和有关知识。作为结束，我们给出一些有关数字阵列（包括一些变形幻方）的习题，有兴趣的读者不妨试一试去求解。

[习题 1-1] 最简单的幻立方体

在立方体的 8 个顶点上分布 1～8，使每面 4 数之和均相等，如图 7-17。

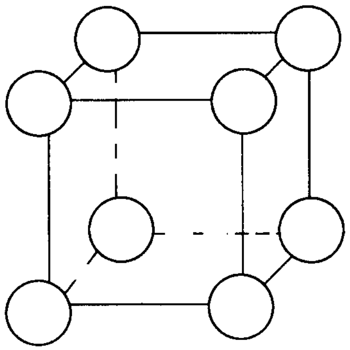


图 7-17 习题 1-1

[习题 1-2] 最简单的幻圆，如图 7-18。

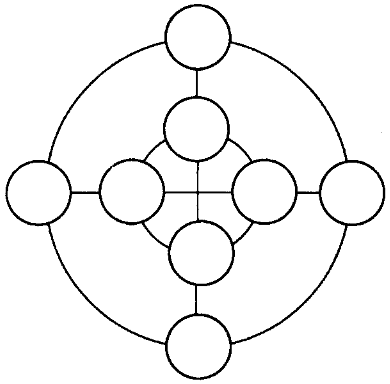


图 7-18 习题 1-2

在 8 个小圆中填入 1～8，使每线上 4 数和相等。

[习题 1-3] 将 1～13 填入图 7-19 的 13 个方格中，使纵向的Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ和横向的Ⅳ几个直条上的方格中数的和均相等。

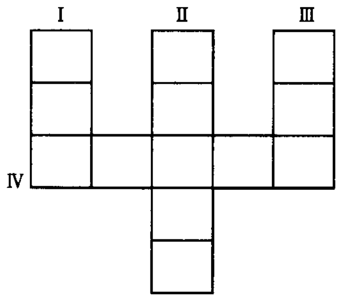


图 7-19 习题 1-3

[习题 1-4] 交叉方

将 1～16 填入 16 个小圆中，使每边 4 数和及 2 个交叉正方形 4 顶角上 4 数和均相等，如图 7-20。

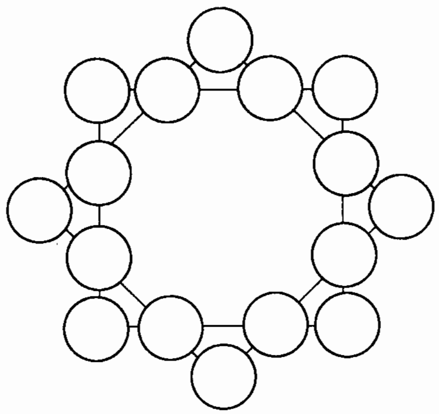


图 7-20　习题 1-4

［习题 1-5］在图 7-21 的 8 个小圆中填入 1～8，使任意 2 个有直线相连的 2 个相邻小圆中都不是 2 个相邻的数（如 1 和 2，2 和 3）。

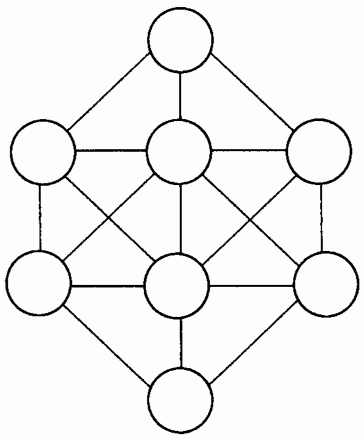


图 7-21　习题 1-5

［习题 1-6］在 1～15 中任选 12 个数填入图 7-22 的小圆中（小圆共 13 个，因此允许有 1 个数用 2 次），使任意有直线相连的 3 数之和均相等。

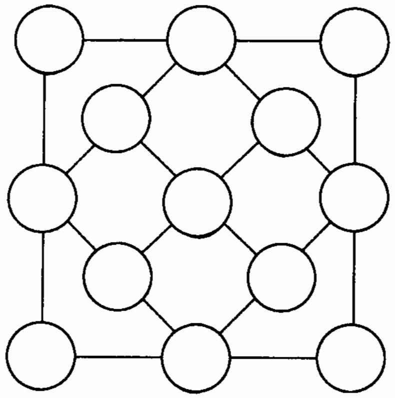


图 7-22　习题 1-6