第二十八章 数学：方法与艺术

纯粹数学在近代的发展，可以说是人类性灵最富于创造性的产物。

A·N·怀特海(Alfred North Whitehead)

在前面的章节中，我们考察了数学本身的某些观念，并在现代背景下审视了这些观念的起源，以及它们对其他文化分支的影响。在近代，这些观念以令人吃惊的速度发展着。相应地，数学的影响在数量、深度和广度上都逐渐增强了。任意找出一个曾在某段时期与数学有着紧密联系的领域，对它们之间持续而广泛的联系加以考查，这都是轻而易举的事情。然而由于篇幅与时间的限制，在这部著作中不可能对数学与艺术、科学、哲学、逻辑学、社会科学、宗教、文学以及其他众多的人类活动与利益的关系作综合性的论述。我希望，我对本书所表明的观念——数学在现代文化的形成过程中扮演了一个重要的角色——给出了充足的论据。

然而，还有一个几乎被人忽视的方面——数学本身就是一个充满活力的繁荣的文化分支。经过几千年的发展，数学已成为一个宏大的思想体系，每个受过教育的人都应该熟悉其基本特征。虽然古希腊人在数学方面所作的贡献已使现代数学的本质初现端倪，但在最近几个世纪所发生的一连串的事件，特别是非欧几何的创立，更是使得数学的作用和特征发生了剧变。对 20 世纪数学的性质进行

研究,不仅修正了人们对数学的错误的认识,而且还使我们得以了解数学力量的增长、数学在人类精神活动中地位得以提高的原因。

从更本质的方面来说,数学主要地是一种方法。它具体体现在数学的各个分支中,如关于实数的代数、欧几里得几何,或任意的非欧几何。通过探讨这些分支的共同结构,我们对这种方法的显著特征将会有一个清楚的了解。

任何数学系统或数学分支都研究一套相应的概念。比如欧氏几何研究点、线、三角形、圆等等。对这些概念给出精确的定义,是建筑整个精美大厦的基石。遗憾的是,并不是每一个概念或术语都能够从其他的以某一定义为开端的方式而予以定义。确实,一个未被定义的术语可以用实际例子来表述。代数中没下定义的"加"这一概念,就可以通过计算两群分开的牛合到一起的牛数所用的术语来表示。但是,这种用物质术语所作的说明,并不是数学固有的组成部分,因为数学所要求的只是逻辑独立性和自足性。当然,有的概念可以借助于未被定义的概念来表达。如圆可以用点、平面、距离等术语来定义,即:在同一平面内,到定点的距离等于定长的点的集合就是圆。

既然说有的术语未被定义,并且那些我们在习惯上联结这些术语的物质图像、过程都不是数学固有的组成部分,那么我们的数学推理是以什么作为基础的呢?答案是:公理。这些关于给出了定义的和未给出定义的术语的断言——未经证明就为我们所接受的公理,它们是对被讨论的概念做出结论的惟一基础。

然而,我们怎么能够知道哪些公理是可以接受的呢,特别是有的公理还包括未被定义的术语?我们是不是像狗追逐自己的尾巴一样,最终只是劳而无功呢?至于未被定义的术语,通常是由经验给出解释,为人们提供其意义。人们接受有关数和欧氏几何的公理,就是因为事实和物质世界的现实图景已经证明了它们的可靠性。在这里,我们还要注意,不能把经验当成数学固有的组成部分。数学只是以这些公理作为出发点和基础,而不考虑这些公理是从什么地方得来的。直到19世纪,经验还一直是公理的惟一来源。然而,考察非欧几何诞生的历史,则发现这门学科的产生,是由于人们

受到想用一种与欧氏几何中所引用的完全不同的平行公理的愿望的驱动。在这一过程中，数学家们有意识地违背了经验常识。

虽然非欧几何的公理以与人们日常经验截然相反的面目出现，然而非欧几何所导出的定理却完全适应于物质世界。鉴于这一事实，因此就表明在公理的选择中，应该有一定程度的自由。这有一部分的正确性，因为任何一个数学分支的公理必须相容，互相一致，否则就会造成混乱。相容性并不仅仅要求这些公理本身不互相矛盾，而且要求由它们所导出的定理也不能互相矛盾。

对一致性的要求近年来已开始在现代科学中呈现出伟大的意义。只要数学家认为他们的公理和定义是绝对真理，他们就会否认矛盾的产生，除非在逻辑推理的过程中出现了错误。因为数学通过自身的公理来阐释自然界，并且从中导出了其他的真理，而不论它们是否会立刻在自然界得到确证，所以人们认为数学必须是一致的、相容的。非欧几何的创立使数学家们认识到，他们必须有自己的主见和立场。他们的工作目标并不是记录自然，而是阐释自然。而任何阐释不仅可能是错误的，而且可能前后矛盾。随着康托尔的贡献（关于集合论、超穷数的理论）而导致的数学发现，使得相容性、一致性问题显得更加突出了。

也许，通过直接验证，我们可以证明一个公理系统中的公理彼此不矛盾。但是，我们怎么能确信，由它们导出的成百个数学定理也不互相矛盾呢？要回答这个问题得花很大的篇幅。而且到现在为止，也还没能产生出一个令人十分满意的答案。确立众多的数学分支的一致性，是当前数学研究的焦点。至少到现在为止，数学家们要证明包含一些有关实数的公理和定理的数学系统的一致性，都感到困难重重。这的确是一种令人困窘的局面。前些年，一致性曾代替真理成了数学中的上帝，现在，似乎连这个上帝也不存在了。

除了公理的彼此相容这一点外，一个数学分支中的公理还应该是简单明了的。道理很简单，既然公理是未被证明而被接受的，那么我们就应该准确理解我们所承认的内容。简洁将增强这一理解过程的保险性。数学系统中的公理必须彼此独立，即不可能存在这

样的一条公理,该公理能从其他的一条或几条公理中推导出来。这一要求虽然不是必需的,但却更可人意——使人们感到满足。通过推导而能得出的公理,最好是当作定理来看待,因为这样就尽可能地减少了未经证明的命题的数目。最后,数学中的公理还应该是能结果实的,就像精选出的良种应该结出丰硕的果实一样,因为数学活动的一个宗旨就是获得新知识,以及找出蕴含在公理中的意义。欧几里得之所以对数学做出了重大贡献,就因为他选择了一套简单明了的公理,使之从中得出了数以百计的定理。

假定已经选出了一套满足所有必要的和合乎要求的公理,那么数学家们是怎样知道该证明什么样的定理,又是怎样证明的呢?下面,我们将对此逐项进行考查。

潜在、可能的定理有许多来源。在这些源泉中,经验是最主要的和最能导出成果的。物质的或真实的三角形的经验,会使人想到许多有关数学中的三角形的结论。而以公理为出发点的推理,或者能证明这些结论,或者将推翻、否定这些结论。那些被证明了的结论就是定理。当然,我们应该在广泛的含义上理解"经验"一词。毫无目的的观察,有时也能导致一个可能的定理,从实验室、观察室中所产生的科学问题同样可以导致一个精确的定理,甚至像如何在一个平面上表现出厚度这样一个艺术问题,也能产生出精美的数学定理。

在很大程度上,数学提出了很多有关自身的问题。很多潜在、可能的定理,就是通过对所观察的数以及几何图形加以总结得来的。例如,一个常与整数打交道的人,毫无疑问地会观察到这一现象:前两个奇数之和,即 $1+3$ 是 2 的平方(2^2);前3 个奇数之和,即 $1+3+5$ 是 3 的平方(3^2)。类似地,前 4,5,6 个奇数之和也是如此。于是,通过这一简单的运算,就暗示着可能存在一个普遍规律,即前 n 个奇数之和,n 为任意一个自然数,等于 n 的平方(n^2)。当然,仅仅通过以上的计算,并不能证明上述结论是一个定理。它也不可能通过类似的计算而得到证明,因为没有人能通过计算证明这一结果适合于任意一个自然数 n。但不管怎样,这样的计算为数学家们提供了一定的线索。

让我们再看看下面一个例子，以便更好地理解怎样通过归纳启发而得到数学中潜在或可能的定理。三角形是一个有 3 条边的多边形。在欧几里得几何中，三角形内角之和是 180°。人们自然要问，是否存在一个有关任意多边形内角之和的定理呢？一个很古老的定理给出了回答，多边形内角之和等于边数减去 2，然后再乘以 180°。

在欧几里得几何中，我们已经清楚地看到，从寻求更可接受的公理导出有关平行线公理的过程中所产生的纯粹逻辑问题，是怎样导致了非欧几何的产生。一旦抓住了这类几何中的主要思想，就可以通过寻求欧氏几何定理的类似方法，而得出许多可能的定理。例如，在其他非欧几何中，类似于四边形内角之和等于 360°这条定理的结论是什么？

以上有关数学家们获得潜在、可能的定理的介绍，不过是众多方法中微不足道的几个例子。即使将那些更偶然的来源都算上，如纯粹的巧合、猜想，或歪打正着，我们还是忽略了潜在的定理的最有用、最有价值的来源——天才的想像、直觉和洞察力。大多数人会漫不经心地看着一个四边形(图 88)，而不会意识到，如果连结四边形 4 条边的中点，就形成了一个平行四边形。这种知识的获得，并非靠逻辑推理，而是依靠一刹那间的灵感和顿悟。

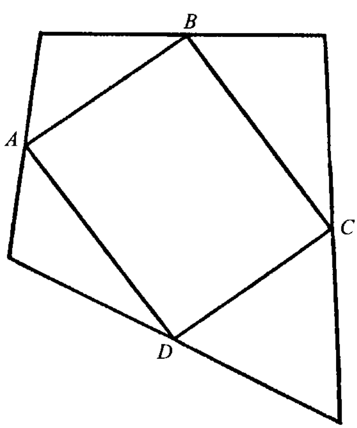

图 88　联结任意四边形中点形成一个平行四边形

在代数、微积分以及高等分析等数学领域,第一流的数学家依靠的是像作曲家那样的灵感。作曲家们觉得自己把握了一个主题,一个乐章,经过适当的发展和修改,就会形成美妙的音乐。经验和有关的音乐知识使作曲家能够得心应手地进行创作。类似地,数学家们预感到一个合乎某一公理的结论,经验和数学知识引导他们的思路进入正确的轨道。当然,在形成一个正确的、令人满意的定理之前,一两次修正是必要的。但是,数学家和音乐家基本上是受一种神圣的灵感所驱动,这种灵感使得他们能够在打下基石之前就能洞悉大厦的全貌。

在确定了要证明的内容是什么之后,接下来就不可避免地涉及如何证明的问题。一位数学家可以在研究了一定条件下的已知事实之后,确信能根据它们来证明一个定理。但直到他能提供这一定理的演绎证明之后,他才能确定它,然后运用于实际之中。通过一些经典的例子,我们可以看到,在确信一个定理成立与彻底证明它成立这两者之间,还有相当一段的距离。古希腊人曾提出了 3 个著名的问题,即用无刻度的直尺和圆规把一个立方体扩大一倍(倍立方)、三等分一个角(三等分角)、把一个圆变成正方形(化圆为方)。在长达 2 000 年的时间里,许多数学家确信,在规定的条件下,不可能作出这些图形,但是,直到 19 世纪给出了关于这些作图问题的不可能性的明确证明,这些问题才被证明解决了。

下面的一个著名猜想也是一个极好的例子,这个猜想的真实性似乎是毋庸置疑的。任意一个偶数可以用两个实数(素数)的和来表示。素数是指一个只能被 1 和其自身整除的整数,因此 13 是一个素数,而 9 则不是。根据这一猜想,$2 = 1+1$,$4 = 2+2$,$6 = 3+3$,$8 = 3+5$,$10 = 3+7$,如此下去。接下来,我们试验其他偶数,发现这一猜想也是成立的。但是,这一猜想却不能称之为一个数学定理,因为迄今为止还没人能够证明它①。

① 此即著名的哥德巴赫猜想(Goldbach's conjecture),中国现代数学家陈景润、王元等人在该猜想方面做了出色工作。——译者注

毫无疑问,定理只能在经过一系列由公理出发的演绎推理确认为真之后才能成立。几千年来,数学家们为做出这些证明而勤勤恳恳地工作。当我们日常使用"数学准确性"与"数学精确性"等词汇时,让我们向为达到无懈可击的知识而不懈努力的探索者致意!

显然,在提出所要证明的问题之后,为了寻求证明的方法,还必须做大量的数学工作。对那些曾为几何习题而绞尽脑汁的读者来说,这一点已无需强调。在这种练习里,所要证明的命题已经给出,要求学生从已给出的条件、已知的命题出发进行证明。在寻求证明的方法时,如同提出所要证明的内容一样,数学家们必须运用想像力、洞察力和创造能力,数学家必须有旁人所不能及的洞察力,找出整个证明开始的步骤,还必须要有坚忍不拔的毅力,找不到答案决不罢休。我们不知道数学家在研究数学问题时脑子里想的是什么,正如我们对激发济慈(Keats)写出精美诗句的思维过程,和是什么原因使得伦勃朗(Rembrandt)用双手和大脑创作出反映心灵深处的油画一无所知一样。我们不能给天才下定义,我们只能说,数学中的创造才能需要卓越的心理素质和精神气质。

也许,有人会觉得我们对数学家的创造性有些夸大其词。数学家在提出并证明一个定理之后,是否真的学到了某些新的东西呢?不管怎样,数学家仅仅是从那些公理中推导出早已存在的结论,因为所有这些结论早已在逻辑上暗含于那些公理之中。数学家们借助于公理花若干个世纪所推导出的定理,不过是对这些公理所包含内容的详细描述。用哲学家维特根斯坦(Wittgenstein)的话来说,数学,仅仅是一种伟大的同义语的反复。

但是,这的确是伟大的工作啊!从表面上看来,把数学中的逻辑结构称为同义语的反复是合情合理的,然而实际上,这种看法就如同把米洛的维纳斯看作仅仅是一位大姑娘一样。持上述观点的人在描述数学时,把一套公理的选择当作购买一座矿藏——丰富的宝藏都在那里面。但是,这一描述却忽略了寻宝过程中耐心的、勤奋的挖掘,精心的筛选,忽略了这些挖掘出的财富的价值和美,也忽略了成功的欢乐与喜悦。

定理的提出与确证,使得一个数学分支的结构得以完善。于是,这一数学分支就包括一系列的术语,其中有定义过的和未被定义的公理,还有建立在这些公理之上的定理。这种对数学系统的分析,描述了数的结构以及各种几何学的结构,它似乎已揭示了数学的本质。但我们对这一学科更进一步的理解,则需要作深入的研究。

每一数学系统都包含有未被定义的术语,例如:在几何系统中的点、线这些术语。在讨论非欧几何时,我们发现,可以赋予直线以实际意义,这种实际意义与数学家们创造这门学科时所设想的无限延伸的线这一概念有很大不同。在一定程度上,对某些未被定义的概念,我们可以有自己的理解,可以对这些概念给出并非确凿无疑的解释,这些事实展示了,在这些术语中存在着比至今所发现的内容更为深刻的意义。

现在,让我们暂且抛开数学,思考一个不需过多逻辑思维的外交方面的问题。某国际机构的一位官员正在着手一项组建一系列职能不同的委员会的微妙工作,他觉得,应该根据以下原则来进行这项工作:

(a) 任何两个国家应该至少参加同一个委员会。

(b) 任何两个国家至多只能同时在一个委员会中。

(c) 任意两个委员会中,至少应该有一个国家是相同的。

(d) 每个委员会至少应该由 3 个国家组成。

尽管这位官员所提出的这些原则似乎是很明智的,但他却对由此带来的一些无法预见的复杂性感到惴惴不安。于是,他去请教一位数学家。这位数学家立刻指出了如下的几种结论:

(1) 任意两个国家组成的集团参加并且仅仅参加同一个委员会。

(2) 任意两个委员会中,将有一个而且仅仅只有一个国家是相同的。

(3) 在任意委员会中,许多 3 个国家组成的集团将不会出现。

这位数学家之所以能够很快得出以上结论,是因为他意识到,

那些有关国家与委员会的原则，与数学中有关点和线的命题完全吻合：

(a′) 任意两点都至少在同一条直线上。

(b′) 任意两点都只能位于一条直线上。

(c′) 任意两条不平行的直线必有一交点。

(d′) 每一直线至少包含 3 个点。

这两个集合中仅有的不同就是，点、线这两个词取代了国家和委员会。数学家根据从(a)到(d)的条件推导出的有关点与线的定理，完全适用于国家和委员会，因为仅仅只需用从(a)到(d)的事实就能确立这些定理。数学家只要把这些定理中的点和线用国家和委员会这两个词来代替，就可以得到他给那位国际官员所提供的结论。事实证明，点、线这两个术语缺乏确定无疑的含义，的确大有裨益，具有重大意义。

现在，我们应该明白这样一个具有重大意义的结论，在从明白无误的公理中得出的演绎证明中，这些未被定义的术语的含义是各不相关的。当代数学家们已经意识到，只要包含未被定义术语的公理能适用于实际意义，这些实际意义就能与点、线，以及其他未被定义的术语一一对应。如果这些公理确实成立，那么与其相应的定理也适合于对现实的阐释。

我们对数学本质所具有的新概念，似乎剥夺了数学的意义。数学概念似乎不再是与一定的物质概念紧密联系着的，并且不再能给予人类以洞察物质世界的力量，而成了一些空洞的、毫无所指的词句。然而，与其相反的另一方面的意义也是正确的，数学比以前所认为的具有了更丰富的内涵、更广阔的范围，并且具有了更加广泛的用途。除那些以前与数学概念相联系并且仍然适用的现实含义外，数学概念还存在着无穷无尽的各式各样的意义，它们也同样适用于数学系统内的公理。在这种新条件下，数学系统的定理有了新的含义，因而产生了新的用途。

然而，纯数学本身并非马上或在产生之初，便与那些赋予未被定义术语的特殊意义相联系。它在更大程度上与从公理和已被定

义的概念中推导出的结论相关。另一方面，应用数学则与被赋予了物理意义的纯数学中的概念有关，这些概念使与之相关的定理在科学工作中具有实际用途。从纯数学到应用数学的转变，常常是在不知不觉中进行的。圆的面积等于 πr^2 是纯数学中的定理。而一块圆形土地的面积，是 π 乘以这块土地的半径的实际长度的平方，这则是应用数学中的一个定理。

我们所得出的纯数学与应用数学之间的区别，正是罗素在说下面一段看似无理、实则充满睿智的话时心里所想的，罗素说："数学可以定义为这样一门学科：我们不知道在其中我们说的是什么，也不知道我们说的是否正确。"当然，许多人不需要罗素这一番提示，就已经认识到了这一点。然而，他们可能不知道这样理解数学是何等的正确，而且也无法对这种正确性加以证明。数学家们不知道自己所说的是什么，因为纯数学与实际意义无关；数学家们从不知道他们所说的是否正确，因为作为一位数学家，他们从不费心去证实一个定理是否与物质世界相符。对于这些数学定理，我们只能问：它们是否是通过正确的推理得来的。

数学系统的抽象特征，以及这一特征与实际意义的关系，可以通过音乐中的类似情况来予以说明。贝多芬创作了"第五交响曲"，普通人则对它给予了种种解释：希望、绝望、胜利、失败、人类与命运的抗争，所有这些主题都在贝多芬的这首曲子中体现出来了。然而，音乐和数学一样，它们都可以脱离"实用"而存在。

我们可以相信，对纯数学来说，从有关未被定义术语的公理中推导出结论，是一个特殊过程。我们暂时讲一件有些离题的事情。通过这件事情，会使我们相信，类似数学中的逻辑其实毫无新奇之处。让我们来看看典型的律师的思维过程。每位律师都知道一个公理——虽然他喜欢称之为原则或规定——这就是：每一自治地都有管辖权（又称警察权，police power）。根据联邦政府对州的定义，纽约州对地方事物有自治权。纽约州发展工业，这完全是地方事务。因此，纽约州政府对本地区的工业有管辖的权力。根据法律定义，在纽约雇用电梯工是一种在州内进行事务，因此，纽约州政府在

这类事务上,特别地对雇用女电梯工有管辖权。

通过运用一些包含有关概念与术语的公理,这位律师已经得出一个结论。然而,在这里我们应当注意的是:在上述这个推理过程中,没有给出或用到“管辖权”的定义。这位律师所利用的,只是每一自治地有管辖权这一公理。因此,如同被数学家运用的点和线一样,“管辖权”只被当作一个未被定义的术语来使用。进一步,那些缺乏法律经验的读者,在同意这一推理过程的同时,会把“管辖权”(police power)同警察(police)联系起来。然而,在一般的法律上,对管辖权的解释是这样的:为健康及一般福利所提供的权力。作为法律史上的一个事件,在相当一段时期内,管辖权并没有包括妇女工资的最低限度。因此,我们的推理会导出这样一个结论,纽约州政府不能限制女电梯工的最低工资。但后来法院作出决定,管辖权包括妇女的最低工资限度。因此,根据管辖权的这一定义,纽约州政府则可以确定女电梯工的最低工资。于是,管辖权这一未被定义的术语,可以有完全相反的两种解释。然而,在两种互相矛盾的解释的情况下,通过推理得到的结论却依然成立。

通过这个例子,我们看到,律师和数学家一样,他们从事的是一系列包含未被定义的术语的演绎推理,只有当需要利用所得出的结论时,他们才赋予这些术语以实际的意义。就像数学家们在不同情况下,给未被定义的术语如“点”以不同的、甚至是矛盾的现实意义一样,法院在不同的时期也对未被定义的法律术语,如“管辖权”赋予互相矛盾的含义。

数学过程和法律过程的相似性,超出了它们都在一系列的演绎推理中运用了未被定义的术语这一方面。法律原则并不是数学公理,它们属于特定的系统,如同公理属于数学系统一样,而不同的系统则可以有彼此矛盾的原则。例如,个人有权经营企业,就是资本主义政府的原则,这就如同平行公理是欧几里得几何系统中的公理一样。法西斯的、民主的、共产党的政府形式的区别,正是基于它们基本原则的分歧,正像几个几何系统中不同的定理来源于不同的公理系统一样。正如每一种几何被用来试图处理物质空间,每一种政

治制度也被用来试图管理社会秩序。

不仅法律界的律师们运用推理的数学体系——这一点我们已经作了说明——而且政党的政客们也一样。在每次竞选运动来临之际，政客们纷纷投机经营。每个政党的领袖们制定一个政纲，其中的每一准则，实际上就是这一政党的基本政策，如同数学中的公理一样。从这一政纲的条文中，我们可以推测出一个政党在未来立法活动中的立场。到这一步时，一切都很顺利。这些政客未说明——更不用说强调指出了——在政纲中所自由使用的那些未被定义术语的意义，如自由、正义、美国化、民主等等。不用说，在这些方面，使用未被定义的术语自然有其深刻的用意。

通过讨论数学系统中未被定义术语的重大意义，我们对数学思维的抽象性应该有所理解了。这种数学的抽象性，是数学本身适当地舍弃了原来与这些术语相关的物质意义的结果。数学方法的抽象性，还表现在另外一个方面。在自然界所提供的复杂的经验中，数学抽出某些特殊的方面并加以研究。这种抽象是为了减少所考察的事物的属性。例如，数学中的直线与桌子边或由铅笔所画的线相比，所具有的属性就少得多。数学中的直线所具有的属性，通过一系列公理而得以表达出来，如两点决定一条直线。而现实中的直线除具有这一属性外，还有颜色，甚至有亮度和厚度；除此之外，现实中的直线都由具有复杂结构的分子所构成。

也许，有人会不假思索地说，仅仅通过事物的少数属性来研究事物的本质，似乎不可能会得出什么有价值的结果。然而，数学具有强大威力的奥秘，部分地就存在于这种抽象之中。借助于这种抽象思维，我们可以摆脱繁琐的细节，从而比把我们面前的事物的属性全部加以考虑取得更多的成果。抽象过程的成功，尤其是在对自然界进行抽象时的成功，就依赖于这一分而治之的规则。

除了能给所研究的问题确定范围以外，集中考虑经验的某些方面还有其他的优点。实验科学家因为基本上是直接与实物打交道，所以他们的思维就局限于由感观所观察到的事物，从而束缚了手脚。数学家通过从事件中提取抽象的概念与属性，可以借助于抽象

思维，而遨游于由视觉、声音、触觉等构成的物质世界之上。于是，数学就可以“处理”诸如“能”这一类的物质，当然，对他们也许不能进行定性的描述，因为它们显然超出了感觉世界的范围。例如，数学能够“解释”万有引力，而万有引力作为宇宙的一种属性，则是飘渺难测的。通过类似的方法，数学还能用来处理并“揭示”电、无线电、电磁波、光等种种神奇的现象。而关于这些现象的物理图景，则常常是推测性的，并且总是不那么充分。然而，抽象的形式——数学公式，则是我们处理这些现象的最有意义、并且是最有效的方式。

从物理现象中抽取定量的方面加以分析，常常能出人意料地揭示出事物的本质联系——规律，在一些互不相关的现象中，量的规律总是呈现出惊人的一致。麦克斯韦发现的电磁波与光波具有相同的微分方程规律，就是这方面的一个极好的例子，这一微分方程立刻揭示出，光波和电磁波具有同样的物理属性，这种联系在后来得到了无数次的证实。正如怀特海所说：

> 没有什么比这一事实更令人难忘的了，数学脱离现实而进入抽象思维的最高层次，当它返回现实时，在对具体事实进行分析时，其重要性也相应增加了……最抽象的东西，是解决现实问题最有力的武器，这一悖论已完全为人们接受了。

有的人在承认这一悖论的同时，却指责自然科学（物理科学）为了取得成功，不得不借助于数学的抽象性。其实，他们应该好好想一想，在借助科学揭示物质世界的本质时，除了数学以外还能有什么途径呢？爱丁顿(Eddington)的回答是，自然科学所能给予我们的，不过是一些有关数学关系和结构的知识。金斯(Jeans)说，对世界所进行的数学描述乃是最真实的。照他看来，帮助我们更好地理解的图景和模型，反而使我们愈发远离现实，它们就像是“精神的雕像”。而超出了数学公式，则一切该由我们自己承担责任了。

我们一直在论述数学作为一种方法，这一方法被应用于研究量和空间的关系，以及从这些最初的研究领域中产生的概念。然而，今天数学的研究范围不再有什么明确的限制了。非欧几何的产生，

如同我们所看到的那样,已经使数学家们从产生真理的束缚中解放了出来,使数学家们得以自由地采用公理,并且能够研究那些也许对帮助我们认识世界无明显作用的思想。这就驱使数学家们扪心自问:到底是什么东西促使自己选择研究方向,自己进行数学研究的动机是什么,是什么使数学家的工作区别于浅薄的谜语、填字游戏甚至胡说八道呢(那些想马上回答这个问题的读者,未免有些操之过急。)? 近百年来,数学家们已开始认识了古希腊人的思想和主张,但他们却又忽视了这样一个事实:在自古希腊以来的若干世纪里,数学一直是一门艺术,数学工作必须满足审美要求。

毫无疑问,有很多人认为,把数学归入艺术是没有道理的。最强烈的反对理由,是认为数学没有感情因素。当然,这一论据低估了数学在某些人心里所引起的反感。这种反对的原因,部分地也在于人们低估了当数学的创造者们成功地形成他们的数学思想以及确立巧妙而独特的证明时所体验到的快乐。实际上,即使是学习初等数学的学生,当他们成功地证明了研习很久的练习题,通过自己的努力和能力获得了见解,欣赏到其中蕴含的意义、秩序时,他们也会觉得欢欣鼓舞,而在这以前他们却还处于无知与困惑的状态。

不管怎样,数学确实不像音乐、绘画和诗那样过多地借助情感。一个人完全有理由坚持认为,艺术的基本功能是激发人的情感。根据艺术的这一定义,一张令人欣赏的剧照,将比很多伟大的油画更具有艺术性,而抽象绘画与现代雕塑则会不被当作艺术,并且也使人们对建筑雕刻与陶瓷艺术产生怀疑。毕加索(Picasso)那静止的生命的油画,印象主义画家莫奈(Monet)的有关空间与光学效果的研究,修拉(Seurat)和塞尚(Cézanne)的作品,立体派艺术家的“组合”,都不符合艺术的上述要求。事实上,现代的纯艺术强调绘画的理论化和正规化,强调线条与形式的使用,强调艺术技巧方面的问题。这些艺术创作在更大程度上要依靠理性,而不是感情(见插图 27)。文艺复兴时期的绘画,尽管包含有理性研究的成分,但仍是直接受感情支配的产物。现代艺术作品必须首先“设计出来”,要求艺术作品激发情感,这在今天尤其显得不合时宜。

艺术必须为人类创造性的行动提供表现的机会。回顾数系系统的产生过程,计数方法的发展,由于艺术、科学和哲学方面的问题而产生的新分支及其发展,以及建立在机密的逻辑基础上的理论的不断完善,这一切都说明,数学家们也在进行创作。确定一个定理时所进行的精确的陈述,以及使之得以成立的论证,这些都是创造活动。如同艺术创作活动一样,每次整个作品的构成——从提出定理到给出证明,直至构造体系——并不是发现,而是创作。

当然,通过创造性的活动,必须产生出一部具有设计、和谐与美的作品。这些特征在数学的创造活动中也得到了体现。设计,系指结构上的式样的体现,当然还包括秩序、对称、平衡的体现。很多数学定理揭示的正是这样一种设计。例如,考察下面一个平面几何中的定理:所有面积相同的 n 边形,以正 n 边形——边长相等且内角相等的 n 边形——的周长最短。就这一点来说,在面积相等且边数相同的情况下,一个正多边形的周长比任何一个非正多边形都短。现在,让我们看一看面积相等但边数不同的正多边形,哪一种周长较短呢?答案是:边数最多的正多边形其周长最短。当然,我们可以画一个有任意多条边的正多边形,但在面积相等的情况下,哪一种的周长最短呢?在这里,通过构图,直觉告诉了我们答案。随着正多边形边数的增加,它在形式上更接近圆,而圆的周长最短。这就是一个数学定理,这一定理是秩序和设计的核心。

设计并非仅仅偶然地存在于数学中,在任何逻辑结构中,它都是必然存在的。正是通过有意义的设计,欧几里得才从最初的几个公理开始,发展起整个欧氏几何。

在数学创造中,体现设计原则的一个极好的例子,是高维几何的建立。$x^2+y^2=r^2$ 是平面上一个圆的方程。$x^2+y^2+z^2=r^2$ 是三维空间中一个球的方程,$x^2+y^2+z^2+w^2=r^2$ 开始时则被当作是四维空间中一个超球的方程。因此,二、三维坐标几何的设计,可以审慎地移植到高维几何。

在许多艺术作品的创作中,各个部分之间,以及部分与总体之间必须是和谐的。在数学创作中,和谐则是以逻辑相容的形式部分

地得以显示出来。任何一个数学系统内部的定理，都必须彼此相容。然而，还有另一种形式的相容与和谐。欧氏几何的整个结构与整个数学是相协调的。通过平行的手段，我们可以用代数的形式解释几何概念，反过来，代数方程也有几何解释。因此，这两种创造彼此协调、和谐。

数学的核心内容一直彼此协调、和谐。在我们所作的简要的说明中，已涉及几何学的 4 个不同的分支——欧氏几何、射影几何以及两种非欧几何。诚如我们所看到的那样，这些分支显得各不相同，并且有时还彼此不相容、不协调。然而，近代一个最令人欣喜的数学上的贡献表明：射影几何可以被看作是公理性的基础，这样，其他 3 种几何中的结果，都可以看作是射影几何中的特殊定理。换句话说，所有这 4 种几何的内容现在已经形成了一个和谐的整体。

另外，数学还提供了另外一种和谐。数学所描绘的自然的状况，或所揭示的大自然的图景，使得紊乱不堪的世界变得和谐完美、井然有序。这是托勒玫、哥白尼、牛顿和爱因斯坦所做出的最伟大的贡献。

当然，很可能存在着这样的情况，一种创造具有艺术品的所有形式特征，但却不属于艺术品的范畴。许多听过现代音乐或看过现代绘画的人，对当今的艺术品可能就持这种态度。对一件艺术品的最终判定，是看它是否给人以愉悦和美的享受。幸运或不幸的是，这只是一种主观考查，主要依靠对特殊的审美趣味的培养。因此，数学是否包含美这一问题，只能由研究数学的人来回答。

事实上，对美感愉悦的寻求，一直影响并刺激着数学的发展。从一大堆自相夸耀的主题或模式中，数学家们有意或无意之中，总是选择那些具有美感的问题。古典时期的希腊人钻研几何，是因为几何的形式和逻辑结构对他们来说是美好的。他们重视发现自然界中的几何关系，并不是因为这些发现能帮助他们更好地征服自然，而是因为这些发现揭示了美的结构。我们看到，哥白尼之所以提出关于行星运动的新观点，就是因为这一理论中的数学结构给予他美感愉悦。开普勒推崇日心学说，也是因为这一缘故。“在我的

心灵深处，我已经证明了日心学说”，他说：“我以一种令人难以置信的狂喜，对它的美加以欣赏。”受到哥白尼的启发和鼓舞，开普勒一生都在寻求具有美感的数学规律。牛顿也把对美的追求，当作自己进行数学和自然科学研究的终极动力。他说，上帝最感兴趣的是，欣赏宇宙的和谐与美。类似的言论，还可以在大多数数学家的著作中找到。

的确，真正的数学家心中对美感的渴求，比最泼辣的主妇们吵架的欲望还要强烈。他们为早已确证的定理寻求新的证明方式，因为旧的证明已经失去了美的吸引力。有的数学演算仅仅只是令人信服，但却不能给人以美感，用著名的数学物理学家瑞利勋爵(Lord Rayleigh)的话来说，有些证明是为了“寻求官方同意”，另外一些证明则“使人神魂颠倒，它们展示出光明，使人不由自主地赞叹：阿门，阿门！”一个别出心裁的证明，书写出来便是一首诗。

对数学问题的不可抑制与动人心弦的探索，使人精神专注，使人能够在这个无休无止争斗的世界中，保持精神的安宁。这种追求，是人类活动中最为平和的生活，又是没有争端的战斗，是“偶然发生灾难时的避难所”，在为当代千变万化的各类事件弄得疲惫不堪的意义面前，数学领域就是美丽而恬静的终南山。

罗素曾用华丽的语言，描绘了数学推理的超然性和客观性所带来的魅力：

> 远远离开人的情感，甚至远远离开自然的可怜的事实，世世代代逐渐创造了一个秩序井然的宇宙。纯正的思想在这个宇宙，就好像是住在自己的家园。在这个家园里，至少我们的一种更高尚的冲动，能够逃避现实世界的凄清的流浪。

而且即使一般人也对数学研究的艺术特征深信不疑。梭罗(Thoreau)说：“最突出的与最美的真理，最终必然以数学形式来表达。”那些仍不为所动的读者，至少应该通过了解到数学家们一直在寻求美，而对数学家们的态度和努力有所了解。

从以上的分析看来，数学符合通常的艺术标准。尽管还有很多

人拒绝承认数学的地位。可是,他们依然在无意识中的确承认了数学的重要性。没有谁在提及一个人有关历史、经济学甚至生物学的知识时,会认为它们是一种天生的才能,可是,几乎每个人在谈到数学才能时,都认为它是一种天赋,只不过有时通过由于缺乏这种才能所显示出的失望情绪来表达。正因为如此,人们才将数学才能与艺术才能相提并论。

遗憾的是,我们对数学的主要内容、本质及其影响不能作更深入的探讨。如果时间允许我们对数学的更高深的分支进行讨论,则我们对数学在文化发展中的贡献将会有一个十分清楚的了解。可惜的是,要精通数学理论必须进行多年的研究,而且又不存在可以缩短这一过程的捷径。我希望,本书所提供的材料至少能消除人们头脑中的以下成见:数学是一本封闭的书,是希腊时代的故事,在人类历史上只是次要的章节。我还希望,本书能使人们对数学在人类文明与文化中的地位有所了解。

可惜的是,数学并没有解决人类所面临的一切问题。理性、公理性方法、定量分析,并不能作为解决人类生活所有问题的方法。艺术家可以运用数学透视原理,但数学透视原理本身并不等于艺术。虽然 18 世纪的思想家深信,可以通过数学方法发现社会规律并且解决所有社会问题。不幸的是,当今的社会秩序比 18 世纪时更加复杂。我们也不提倡把数学当作解决爱情、婚姻问题的手段,虽然人类学家在最近的一次专题讨论会上,确实鼓励人们使用数学方法解决这些问题。数学的范围是有限的,这一有限性的原因,下述警句已作了简要的说明:人类是一种有理性的动物。人的理性仅仅是其动物性的一种修饰,因为人的欲望、感情与本能只是其动物性的一部分,它们常常与理性发生冲突,理性既不能引导也不能控制人的行为。当然,这并不意味着,在人类事物中理性的运用过分了。

人们对数学有各种不同的描述:数学是一个知识体系,一种实际工具,哲学的一块基石,完美的逻辑方法,理解自然的钥匙,真实

的自然，一种智力游戏，理性的冒险，美感的经验。在本书中，我们考察并指出了上述各种描述的背景。当我们考察受数学影响的领域，以及数学为我们在这些领域中提供的部分或全部的方法时，我们会情不自禁地称数学为一种通向物质、思维和情感世界的方法。从人类理解大自然的努力中，从人类为物质世界出现的混乱事件注入秩序的努力中，从人类创造美的努力中，从人类为满足健全的大脑锻炼自身的灵性的努力中，从人类所有这些努力中积淀的精密的思想，正是人类智慧最纯净的升华。我们，生活在一个主要应归功于数学才成就斐然的欣欣向荣的文明之中的人，能够为人类所作的这些努力作证。