第十九章 G大调的正弦函数

音乐，是人类精神通过无意识计算而获得的愉悦享受。

G·莱布尼茨(Gottfried Leibniz)

历史上，很可能曾有过这样的一幕：毕达哥拉斯坐在家乡阴凉的橄榄树下，拨动着古希腊的七弦琴，经常一坐就是几个钟头。通过弹琴，他发现，拨弄弦弹出的声音音高取决于弦的长度，当弦的长度成简单的整数比时，它就发出和谐的声音。从毕达哥拉斯时代开始，音乐研究在本质上就被认为是数学性的，与数学连成一体了。这种联系构成了中世纪教育的内容，中世纪的教学课程包括算术、几何、球面几何学(天文学)、音乐，这就是著名的四艺。相应地，这4门课程分别被认为是纯粹的数学、静止的数学、运动的数学以及对数学的应用，因而这些课程通过数字而进一步相互联系起来了。

从毕达哥拉斯时代到19世纪的若干年时间内，数学家和音乐家，其中包括希腊人、罗马人、阿拉伯人、欧洲人，都试图弄清音乐声音的本质，扩大音乐与数学两者之间的联系。音阶体系、和声学理论和旋律配合法得到了人们广泛详细的研究，并且重新建立起了完备的体系。这一系列长期研究的最高成就，从数学的观点来看，是与数学家J·傅里叶(B. J. B. Joseph Fourier, 1768—1830)的

工作分不开的。他证明了，所有的声音，无论是噪音还是仪器发出的声音，复杂的还是简单的声音，都可以用数学方式进行全面的描述。由于傅里叶的研究甚至涉及美妙的音乐乐句短句，因而使得音乐乐句也能表示成数学的形式。毕达哥拉斯满足于拨弄七弦琴，而傅里叶却使得整个交响音乐奏出了和谐的旋律。

尽管1768年出生于法国奥塞尔(Auxerre)的傅里叶的确是一位在数学上出类拔萃的学生，他却一心想成为一名炮兵军官。但因为他是裁缝的儿子，结果未遂心愿，这样他非常不情愿地转谋教士职位。当他以自己杰出的数学才华，终于获得了梦寐以求的一所军事学院的教授职位时，他就放弃了僧侣职业。因为如此低下的职业与其所获得的社会地位太不相称了。

正是在1807年，结束了在拿破仑麾下的政治、科学服务后，傅里叶在向法国科学院呈献的一篇论文中，提出了一条独创性的定理，这条定理对于物理学的进步至关重要，该定理提出了空气波动的数学处理方法，就如同牛顿所提出的用数学方法研究天体运动一样。明显地，19世纪正在使18世纪的巨大希望成为现实。

现在，让我们看一看傅里叶如何使音乐声音的数学分析成为可能。假如一位小提琴师站在一个大剧场的舞台上，手拿小提琴演奏。他演奏的声音部分地只有一秒钟，另外一些则拖得长些；有时声音响亮，有时则十分轻柔；有些有高音，有些则是低音。坐在百英尺远的人，也能清晰地听见演奏的全部声音。当小提琴师演奏时，发生了什么物理现象呢？观众是如何听见他演奏的声音的呢？

为了便于解释，首先，我们考虑由音叉发出的简单的声音。如果敲击音叉的一边，那么音叉将会迅速地颤动。当音叉第一次运动到右边时，它就与附近的空气分子相碰撞(图53)。这种现象称为缩聚(condensation)。由于空气压力趋向于自我平衡，因此，缩聚的空气分子进一步向右移动，直到没有那么拥挤的地方。反复重复这个过程，那么向右的缩聚将会一直进行下去。

但是，与此同时，音叉已经向左运动回到它原来的位置。这样就在音叉原来的位置上留下了一个比较大的地方。位于这个地方

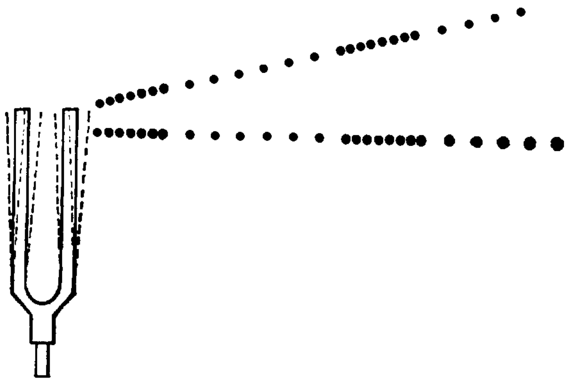


图 53 一个音叉振动所导致的空气分子的运动

右边的空气分子就涌向这个不那么拥挤的地方，这样，在这些空气分子先前的位置上又造成了另一个稀薄的空间。因此原先向右移动的分子现在又向左进入这个稀薄的空间。如果我们称造成一个稀薄空间是一次稀疏(rarefaction)，那么我们就可以说刚才发生的是一次离开音叉向右移动的稀疏。每一次音叉的向右移动就有一次向左的缩聚和向右的稀疏。

我们已经考察了在音叉右边的运动。事实上，在所有方向都产生缩聚和稀疏。当这些缩聚和稀疏到达我们的耳膜时，它们所引起的振动就使耳膜产生了声音的感觉。

空气分子不会从音叉运动到耳朵，认识这一点十分重要。每个分子都在它所处位置附近的一个有限区域内运动，从而引起它前后分子的振动，所传播的是接连不断的缩聚和稀疏，因此就构成了声波。

严格地说，在一个特定地区的所有空气分子，并不会按完全相同的方式运动；但是，我们关注和感兴趣的是分子运动的整体效应。这一点能够用典型的分子运动术语来描述。假设这个分子原先位于 O 点(图 54)。缩聚使得它向右移动到 A 点。然后随着发生的稀疏使得它向后运动通过原来的位置到达 B 点；下一次缩聚又使它回到 O 点。现在，就已经做了一次全振动。但是，在音叉所产生

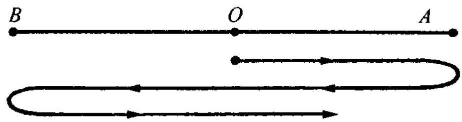


图 54　理想空气分子的运动

的连续作用下，分子不会在 O 点停住，而是不断地做这样的全振运动。因此，在分子运动时间内，从原有位置开始的分子的位移将随着时间而连续变化。

理想空气分子的运动，通过一个非常精致的称为声波显示仪的仪器能够清晰地显示出来。当发出的声音靠近这个仪器时，它就在理想空气分子位移所形成的图形上，记录下了空气分子的振动。分子沿着一条直线来回运动。但是，当图形上的水平轴表示从运动开始所经历的时间时，则图形上的垂直距离展示的就是从开始的静止位置起的位移。从 O 点到 Q 点(图 55)的曲线部分代表在一个完整的音叉振动周期内理想分子的运动；从 Q 点到 R 点，代表着另一个全振动。如果敲击音叉，使得音叉开始在它起始位置的一边运动到最大值 0.001 英寸[①]位置然后又向另一边运动，那么声波显示仪记录下具有极大值的图像，也就是具有0.001英寸的最大位移。如果音叉在 1 秒钟内做 200 次完全振动，那么理想分子也将如此；声波显示仪也将在一秒钟内记录下从 O 点到 Q 点 200 个同样的图形。

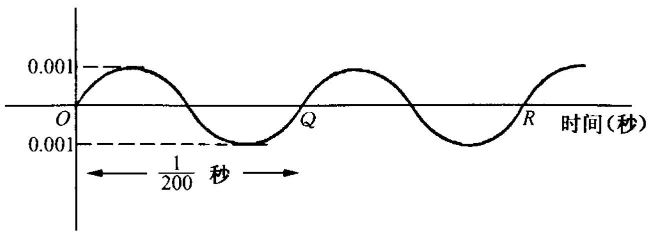


图 55　与理想分子的运动时间相对应的位移图形

① 1英寸=0.0254 米。——译者注

随后，我们要从物理学上考虑音叉的声音是如何传到空气中的。是否有可能将这种声音用一个公式表示出来？如果可以，得到的这样的表达式是什么？

与噪音和仪器发出的声音相比，音叉的声音是简单的，但是，现在还是让我们自己着手完成用数学公式表示这种简单声音的任务。我们看到，这将是一个与理想分子运动的位移和时间相关的公式。就如同一个与下落物体的距离和时间相关的公式一样。

数学家有现成的公式。在关于变量关系的讨论中，有公式 $y=\sin x$，该公式具有我们所需要表示图像的那些性质，对我们十分适用。如图 56 所示，当 x 从 0 增加到 90 时，这个函数的 y 值从 0 增加到 1；当 x 再增加时，y 值减少到 0，变为负值直到 -1，然后当 x 增加至 360 时，y 值则为 0。在从 $x=360$ 到 $x=720$ 的区间内，y 值将重复出现从 $x=0$ 到 $x=360$ 时的情形。在每一个后继的 x 值的 360 个单位中，y 值都将第一个 360 个单位内的情形重复一次。换句话说，函数是规则的或者说是周期性的，我们也可以说，在每一个 x 值的 360 个单位间隔后，y 值就周期性变化一次。读者可能已经注意到，此处的 sin 一词，与早期的亚历山大里亚希腊时期的数学中所使用的符号有关。函数 $y=\sin x$，当 x 从 0 到 90 变化时的 y 值，就是三角比 $\sin x$ 当 x 从 0°变化到 90°时的精确值。从希帕霍斯到瑞士数学家欧拉的若干世纪中，最初是直角三角形中关于角定义的三角比，现在已经脱离了角的关系，而被认为仅仅是两

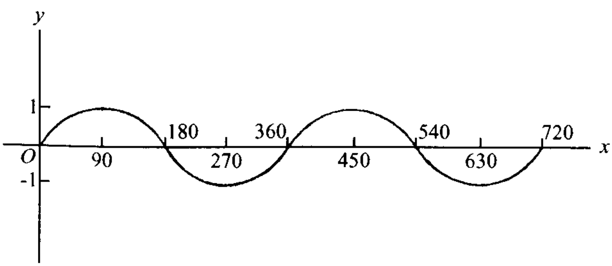


图 56　$y=\sin x$ 的图形

个变量间的关系。这样 $y=\sin x$ 就成了两个变量 y 和 x 之间的一种关系。几个世纪以来，这种关系已经广为人知了，因此每一个 x 值，无论它多大，y 值总是由图 56 给出。因此，公式 $y=\sin x$ 是一个换了面孔的故人，现在反而来骚扰我们了。由于它原先是三角测量中引入的比，所以称 $y=\sin x$ 是一个三角函数。

这个函数并不完全代表一个音叉的声音，而是有些许非常简单的变化。稍微作些修改将会产生这种适当的变化。考虑一下 $y=3\sin x$。这个公式与 $y=\sin x$ 的不同之处就在于，对于相同的 x 值，前一个的 y 值是后一个 y 值的 3 倍。图 57 显示出 $y=3\sin x$ 与 $y=\sin x$ 相比较的情形。我们可以在描绘 $y=3\sin x$ 的图形时说，它在形状上像原先的正弦曲线；但是，它的振幅，也就是说，它的最大 y 值是 3 个单位，而 $y=\sin x$ 的振幅是 1 个单位。类似地，$y=a\sin x$（此处 a 是一个任意的正数）的图像，具有正弦曲线的一般形状，但振幅是 a 个单位。

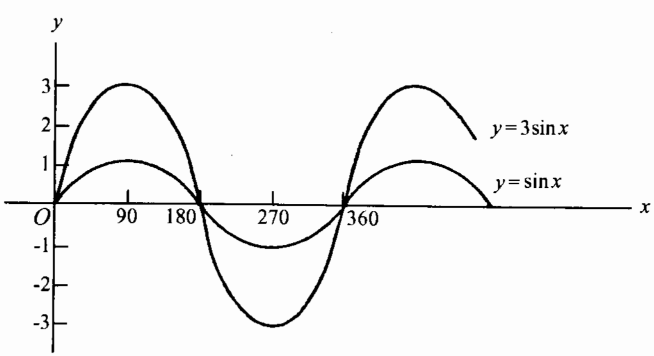


图 57　$y=\sin x$ 和 $y=3\sin x$ 的图形

$y=\sin 2x$ 表示另外一类简单的正弦函数。我们可以假设这个函数与 $y=2\sin x$ 相同。那么，这个函数就是刚才分析的那一类函数的另一个例子。但是，不久我们会看到，情况并非如此。在公式 $y=\sin 2x$ 中，2 的作用在图形中是最引人注目的。图 58 表示出，在从 0 到 180 这个区间中，$\sin 2x$ 是 y 值的一个完整周期，而 $\sin x$ 在 0 到 360

的区间中才是一个完整周期。当 x 达到 360 时，$y = \sin 2x$ 已完成了 y 值的两个完整周期，而 $y = \sin x$ 才仅仅完成了一个周期，因此前一个函数在 360 个 x 的单位里的频率可以说是 2。$y = \sin 2x$ 的频率是 1，因为任何正弦函数的最大值都是 1。

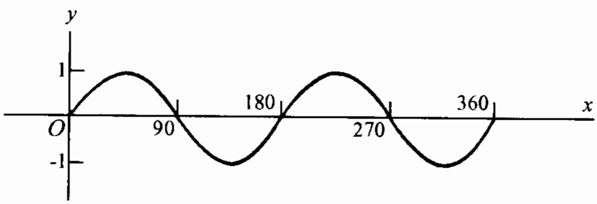


图 58　$y = \sin 2x$ 的图形

我们可以将上述结论推广到一般函数 $y = \sin bx$ 的情形，此处 b 为一个任意正数。$y = \sin 2x$ 的频率是 2。类似地，在 360 个单位的 x 的区间内，$y = \sin bx$ 的频率是 b——这就意味着，当 x 从 0 变化到 360 时，y 值重复完整的周期则需变化 b 次。与 $y = \sin 2x$ 的情形一样，$y = \sin bx$ 的振幅是 1。

有一类正弦函数，振幅与频率两者都与 $y = \sin x$ 不同，例如 $y = 3\sin 2x$。对于同一个 x 值，这个函数的 y 值是从 $y = \sin 2x$ 中得到的 y 值的 3 倍。因此 $y = 3\sin 2x$ 的振幅是 3，而在 x 值的 360 个单位内，它的频率是 2(图 59)。

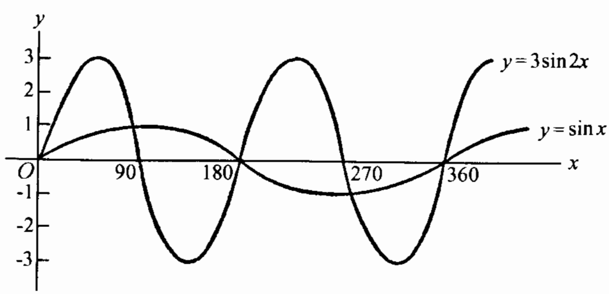


图 59　$y = \sin x$ 和 $y = 3\sin 2x$ 的图形

到目前为止，我们已经得到的结果可以总结成这样的命题：对于函数 $y = a\sin bx$（此处 a 和 b 是任意正数），它的振幅为 a，并且在 x 值的 360 个单位里，频率为 b。

现在，我们准确对音叉的声音从数学上进行描述。刚才就音叉声音的实际图形所进行的讨论表明，理论上的推理能够得到证实。与理想空气分子振动的位移和时间相关的函数形式为 $y = a\sin bx$ 。我们只要确定适合于音叉情形的 a 和 b 就行了。

如果受音叉作用的理想空气分子运动的振幅是0.001，那么这个数就应该是公式 $y = a\sin bx$ 中的 a 值。如果音叉因此而使得理想空气分子每秒钟振动 200 次，那么这个分子运动的图像就有每秒 200 次的频率。但是 $y = a\sin bx$ 的频率是在 360 个单位中为 b，即一个单位中频率为$\frac{b}{360}$①。因此，$\frac{b}{360}$应该等于 200。这样 $b = 360 \times 200$ 即 72 000。所以，描述音叉声音的公式是

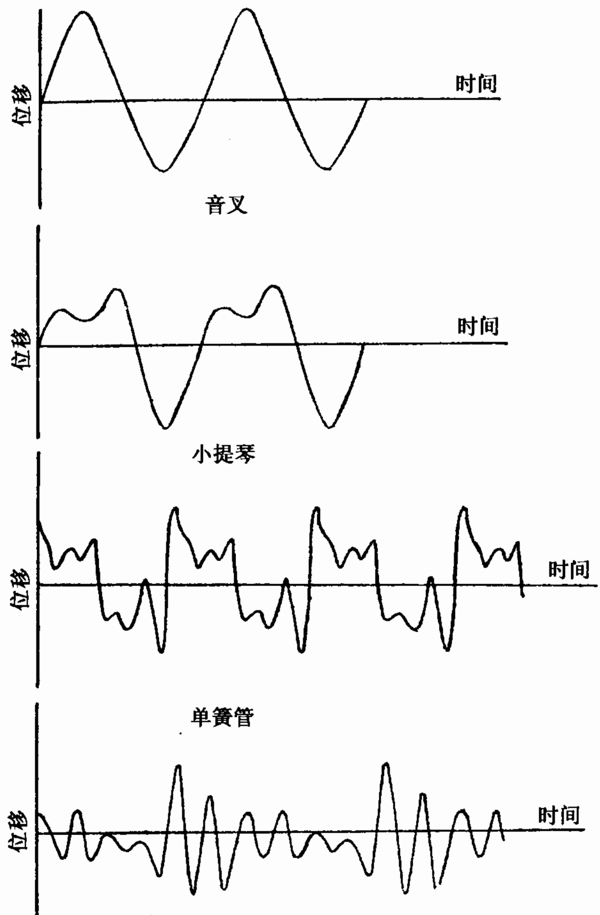
$$y = 0.001\sin 72\,000t$$

此处将 x 写作 t，是为了使我们记住这个值表示时间。

当然，像音叉发出的这样简单的乐音很少。从长笛中发出的声音的确近似于音叉发出的简单声音，但是长笛只是一种例外，它不是一种标准的乐器。对那些更为复杂的声音，怎样从数学上说明呢？有些声音悦耳动听，有些则叫人无法忍受，这又如何解释呢？同一个音符，为什么小提琴和钢琴发出的声音传到耳朵里会有不同的效果呢？

观察各种声音的图像，可以得到这些问题的部分答案。所有乐音的图像——人的声音也包括在内——表现出某种规则性。也就是说，每一个位移相对于时间的图像在一秒内都准确地重复若干次。这种周期性，可以用小提琴和单簧管的声音图像加以证实，也可以用“父亲”（father）一词中“ a”的声音的图像来证实（图 60）。

① 实际声音的频率指的是在一个时间单位内（通常是 1 秒）振动的次数。在 360 个单位中的频率称为周频。——原注



以159的音高发出“父亲”(father)一词中的元音“a”

图 60　乐器和人发出声音的周期性

具有如图 60 所示的这种规则性的声音，在整体上来说是悦耳的，而且能与街上传来的敲击铁罐的声音区别开来，因为后者具有高度不规则性的图像。所有具有这样的图形上的规则性或具有周期性的声音，就称为音乐声音，而不管这些声音是如何产生的。

这样，通过“图形”，我们已经区别了悦耳的声音和使人厌烦

的声音，一般意义上的音乐声音与噪音以及区分它们的特征。不过，对具有这种规则特征的各种令人眼花缭乱的音乐声音，作进一步的分析，找出其特征，这种工作直到 19 世纪才有可能进行。这时，傅里叶应运而生了，他消除了混乱。

将傅里叶的贡献表述为一个纯粹的数学定理，就能使人对此有再清楚不过的了解了。这个定理仅仅是说，代表任何周期性声音的公式，是形如 $a\sin bx$ 的简单正弦函数表达式之和。而且，这些正弦的各项的频率，是其中最低一项频率的整数倍，即 2 倍、3 倍等等。

为了说明傅里叶定理的意义，让我们来分析一位自愿协助我们工作的小提琴师演奏出的声乐，比如说如图 60 表示出的一个图像。代表这个图像的公式基本上是[①]：

$$y = 0.06\sin 180000t + 0.02\sin 360000t + 0.01\sin 540000t$$

首先，我们注意到，按照傅里叶定理，这个公式是简单的正弦表达式之和。第二，第一项的频率在 t 的 360 个单位即 360 秒内是 180 000，在 1 秒钟内的频率就是 $\dfrac{180\,000}{360}$ 即 500。同样，接下来一项的频率是 1 000，第三项的频率是 1 500。因此，第二项和第三项的频率是最低频率的整数倍。这些简单正弦函数各项的图像如图 61 所示。

那么，傅里叶定理的物理意义是什么呢？在数学语言中，这个定理告诉我们，任意的音乐声音公式都是形式如 $a\sin bx$ 各项之和。由于每一项都可以代表一种如音叉这样具有适当频率和振幅的简单声音，因此这个定理表明，每一种音乐声音，无论多么复杂，都是一些简单声音——如由音叉发出的简单声音——的组合。

任何复杂的音乐声音实际上都由简单声音构成，这一数学推论能在物理上得到证实。实验表明，一根振动弦，如钢琴、小提琴的弦，弹出来的效果就像是同时发出的许多简单声音。每一种简单声音实际上都可以由特殊的仪器测出。

① 为简化起见，我们忽略了图形中相对来说不那么重要的因素。——原注

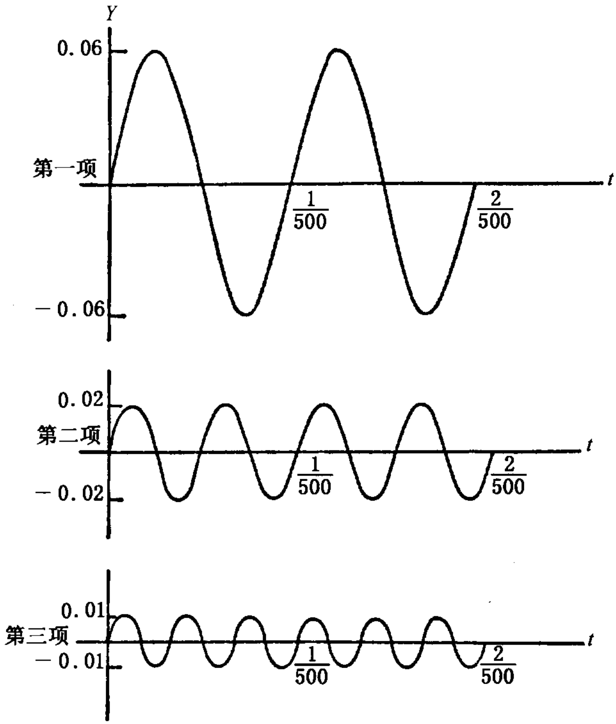


图 61 构成小提琴声音的正弦各项的图像

音乐声音的复合特征，通过这样的事实可以得到更明显的证实：任何音乐声音，都能由音叉的简单声音经过适当的组合而完全表现出来。例如，一个音质实际上与上面所讨论的小提琴音质完全相同的声音，能够由 3 个具有适当相关音量的、每个频率分别为 500，1 000，1 500 的音叉同时发声而产生。这样的 3 个音叉同时作用于理想空气分子并使其振动，因此由声波显示仪记录下来的空气分子效应就是一个单独的图像。如果每个音叉在适当的时候开始发声，那么声波显示仪将记录下与小提琴演奏时相同的图像。因此，从理论上来讲，完全可以由音叉来演奏贝多芬第九交响曲，包括合唱曲《欢乐颂》(*Choral Ode*)。这是傅里叶定理令人惊奇的应

用之一。

这样，任何复杂的声音,都能由简单声音——单音经过适当的组合而形成。单音，称为声音中的泛音(partials) 或和声(和音)。在这些泛音中，频率最低的一个泛音称为第一泛音或基本音。频率次高的音称为第二泛音，按照傅里叶定理，它的频率是最低频率的两倍；具有第一个最低音三倍频率的次高音称为第三泛音；等等。

将复合音分解为泛音或和声，能帮助我们用数学方法描述所有音乐声音的主要特征。每一个这样的声音，无论是简单的还是复合的，都具有使它与其他音乐声音区别开来的 3 个性质，这就是：音高(又称音调)(pitch)、音量(loudness)、音质(又称音色)(quality)。当我们说一个声音是高还是低时，这是指它的音高(音调)。例如，钢琴的声音，按照键盘从左至右的顺序从低音上升到高音。第二条性质即一个声音的音量，是难以立刻理解的。有些声音弱得听不见；另一些则强得震耳欲聋。最后，一个声音的音质是使它与另外具有相同的音高、音量的声音区别开来的性质。甚至当一名小提琴师和一名笛子演奏家奏出具有相同音调、音量的声音时，我们也能够意识到两者音质的不同，因为这两种乐器不一样。

音量、音高和音质的每一种特征，都能从数学上予以“解释”。两个声音，音量较大者，在图形上的振幅(amplitude) 较大。由于图形的振幅是传送声音的空气分子位移的最大值，因此，一个声音的音量取决于振动的空气分子的最大位移;位移越大，声音就越响亮。这个结论是很容易接受的，因为我们从经验中得知，弹吉他时发出响亮弦声的那一下，比漫不经心拨弄一下会产生更大的位移。

具有相同音高的声音产生的图像，其频率是相同的，而刺耳声音图像的频率比低沉的声音图像频率要大。在钢琴上，中音 C 的声音其图像的频率是每秒 261.6，而一个八度高音的频率是每秒523.2。

一个复合声音的音高，或者说它的图像的频率，总是基本音的频率。考虑一下表示钢琴声音公式的例子。这些泛音相对应的频率为 500，1 000，1 500。这就意味着，当基本音的图形完成第一个

周期时，第二个泛音的图形将完成两个完整的周期。类似地，当基本音的图形完成第一个周期时，第三个泛音将完成3个完整的周期。但是，当且仅当基本音经过了一秒钟的$\frac{1}{500}$之后，复合图形才重复一次。这就意味着，空气分子在一秒钟的$\frac{1}{500}$后将又开始循环运动。因为正是频率决定着一个声音的音高，所以我们就明白了，为什么复合声音的音高由基本音而定。

音乐声音的音质影响着图形的形状(shape)。如果考察由音叉、小提琴、单簧管连续演奏出的具有相同音高和音量的声音，那么我们将发现，不同乐器所发出的声音的图形有相同的周期和振幅，但是形状却不一样(见图60)。而同一乐器不同音符的图形的一般形状总是相同的(见图62)。这就意味着，每种乐器有它自己的特征音质。

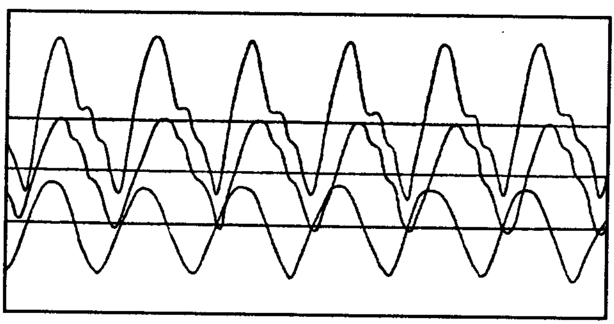


图62 长笛的不同音符

反过来，声音图像的形状，部分地依赖于声音中所出现的泛音，部分地依赖于这些泛音的相对强度。第二泛音，它的频率是基本音的2倍，可能很弱，以至于从总体上来说对声音没有什么影响。用数学语言来说就是，第二泛音的图形振幅很小，它对全部声音的图形形状没有什么影响。例如，在长笛的高音中，除了第一泛音外，所有的泛音都很弱，所以合成音实际上很简单。在这一点上，长笛就像具有类似音高的一位高音演员的声音。因

此，长笛常被用在咏叹调歌剧中为高音演唱伴奏，共同产生出令人喜爱的艺术效果。在男中音中，泛音一般按六、七、五、三等顺序逐渐至最强音。这样的声音其图像如图 60 所示，在那里，男中音发出字母 a 的音高是每秒 159 个周期。在双簧管的声音中(如图 63)，第四、五、六泛音比前 3 个泛音强。如图 60 所示的单簧管声音中，第八、九、十泛音比依次为第七、一、三泛音更强。

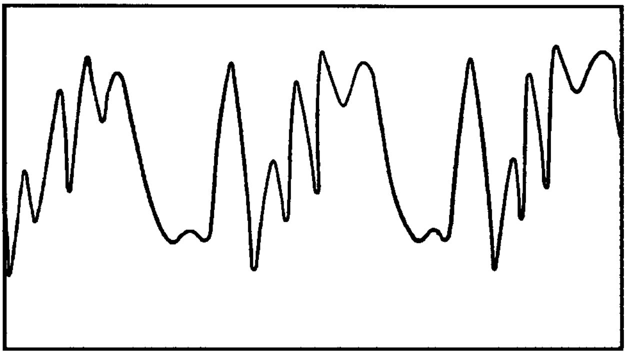


图 63　双簧管奏出的声音

现在，应该明白了，不仅一般的音乐声音的本质，包括它们的结构和主要性质，都具有数学上的特征。傅里叶大笔一挥，无穷无尽的各种声音——人类的声音、小提琴的奏鸣、猫的哀泣——都可以归于一些简单声音的基本组合，而这些简单声音在数学上又不会比简单的三角函数更复杂。这些时常使高中生和大学生感到厌烦、缺乏生气的抽象公式，却在我们周围到处真实地存在着。无论何时一张口，我们就会发出它们所代表的声音；无论何时竖耳静听，我们都能听到它们。

幸而有了傅里叶，现在我们对独特的音乐声音本质才有了清楚的了解。但是，关于声音的和谐组合，美妙的音乐作品的本质，音乐的“精神”，数学必须说些什么呢？答案是多方面的，所以我们在这里只能略示一二。

最动听的和音或音符的组合，如毕达哥拉斯学派所发现的那样，是由那些频率为简单的整数比的声音而组成的。例如，“三分

之一长音阶”是一对如所称呼的音符或音程，它们的频率之比是4∶5；“四分之一长音阶”是一对频率之比为3∶4的音符；而“五分之一长音阶”则是由频率之比为2∶3的一对音符构成的。毋庸置疑，耳朵易于接受这些和谐的声音，它已经远远超出了对两者相关音调的数量关系的区分。

由于耳朵只接受诸如像和音之类声音的适当组合，所以令人满意的音乐音阶结构就成了一个相当复杂的问题。为了演奏出愉悦的和音，音阶就必须给声音提供合适的频率比。除了这一要求之外，还引入了复调音乐或旋律配合法，利用各种不同的方法以达到能够描绘各种不同的感情效果。而且对音乐也提出了同样的要求。为了满足所有这些要求，许多音乐大师和数学家都做过努力。

由于使乐器具有无限多个或者甚至一系列的频率是不可能的，例如，钢琴上每一个音的频率都是固定的，因此只有利用平均调音音阶(equal-tempered scale)结构才能解决这一困难。这种音乐是由J·S·巴赫(J. S. Bach)和其儿子卡尔·菲利普·埃马努尔(Karl Philipp Emanuel)提出的，而且使得这套音阶体系在西方文明中永远适用。

平均调音音阶包括12个音符，比如说从C到C′这个高八度音，就有12个音程。11个中间音符的频率固定不变，所以每一个音符与前面一个的频率之比是相同的。由于从C到C′有12个音程，而这两个音符的频率之比为2，所以相连两个音符的频率之比是1.0594，因为$(1.0594)^{12}=2$。这样，在平均调音音阶中，每一个音程都相同，称为一个半音(又称半音程、半音符)。因此，任何音符都可作为乐谱上的调。尽管这种音阶中的音符所形成的音程不总是十分精确，然而却是最悦耳的。为了产生五分之一音阶，其中两个音符之比是3比2，在这种平均调音音阶中，最好选择两个频率之比为1.498的音符。四分之一音阶中，要求的频率之比为4∶3，可以说接近1.335的比例。这些区别似乎没有什么意义。但是，对于十分灵敏的听觉，这却能够分辨出来。当然，小提琴家可以调整琴弦的长度和张力，歌唱家也不必使自己局限于平均调音音阶的

频率。虽然如此，由于钢琴是一种基本乐器，所以它在近 200 年西方音乐的调整音阶中仍占据主导地位。

在音乐中，数学的作用还推广到了作曲本身。一些大师如巴赫、勋伯格(Schoenberg)为音乐作曲构造、发展了大量的数学理论。在这样的理论指导之下，音乐作品创作的方式，与其说是不可言传的、精神上的感受，倒不如说是冷静的推理。

但是，诸如和音、音阶、作曲理论这些内容已经超过了我们所讨论的范围。我们虽然考察数学的文化方面，但也不能为此花太多的精力。刚才简单的描述仅仅是为了表明，自从第一次认识到天体音乐[①]能归结为数学的这样的时代起，数学已经深深地渗入到音乐领域中了。

当然，音乐声音的数学分析具有重大的实际意义。通过一个实例，也许会使我们充分相信这一断言。电话的发明，为的是试图真实地再现(当然首先是传播)声音。鉴于声音的多变性，有一个时期人们认为，为了实现这一目标，看来似乎仅仅利用简单的物理装置是不可能的。但是，傅里叶定理告诉我们，所有声乐作品的声音，不过是具有不同频率的简单声音的组合。因此，问题就至少被简化到重新产生简单声音的程度。根据傅里叶定理，再进一步分析实际生活中人的声音图像，结果表明，能够听见的仅仅是简单的、频率为每秒 400 至 3 000 的声音。因此，电话的设计就直接朝着重现具有刚才所提到的频率范围内的简单声音这个方向进行。结果，人们成功了，在重现声音音质方面的重大改进也实现了。

利用数学，也大大改进了音乐乐器。弦振动方面的数学分析研究，产生了在钢琴设计方面有用的知识；振动膜的分析被用于鼓的设计；而空气柱振动之类的数学研究则使得大规模改进风琴设计成为可能。音乐声音中和谐音的分析，也被钢琴制造商们加以利用，他们将其用于确定琴槌，以便调整不理想的和音。数学不仅对

① 天体音乐(music of spheres)，原系西方神话，系指天体运动发出的美妙乐声，一般凡人听不到。——译者注

这些乐器的设计大有帮助，而且至少在某些方面可用于判断设计的优劣，人们现在使用数学而不仅仅依靠耳朵了。许多制造商通过声波显示仪之类的仪器，把他们所制造的乐器的声音转化为图形。然后，看看这些图形与这些乐器声音所对应的理想图形的吻合程度如何，由此来判断产品的质量。

不过，无疑地到目前为止，考虑在一般乐器的设计中，真正起作用的是经验而不是数学。然而，在再现声音的仪器如无线电收音机、电报、电影、扬声器系统的设计方面，起着决定性作用的却是数学而不是经验。实际上，在所有这些复杂仪器每个部分的设计中，傅里叶的音乐声乐分析都发挥了重要的作用。甚至当一个外行成了高传真技术的爱好者后，也会立刻学着使用傅里叶语言。鉴于数学对音乐思想的产生、再现做出的贡献如此之大，现代音乐爱好者显然应该把傅里叶的功劳看作与贝多芬同样伟大。

傅里叶的工作还有其哲学意义。美妙的音乐的本质当然主要是由数学分析提供的。但是,通过傅里叶定理，这门庞大的艺术本身以令人意想不到的美妙方式得到了数学描述。因此，人们清楚地认识到，艺术中最抽象的领域能转换成最抽象的科学；而最富有理性的学问，也有合乎理性的音乐与其有密切的联系。