

## 第一章

### 导论：数学与文化<sup>①</sup>

#### ——是与非的观念<sup>②</sup>

你们——战争与贸易之神的子孙们，  
快止住那粗野的脚步，别闯入  
    缪斯——科学与艺术之神的宫殿！  
你们，及基督教军团与宗教裁判所  
    的帮凶，千万别用罪恶的双手  
    玷污了神圣的书卷！  
你们，无知，腐朽，卑贱，狭隘，  
    在愚昧的大脑中，一切  
    都只觉得头晕目眩。  
你们，怎会爱好任何命题，只知听从  
    上司的召唤，无论多么美妙的公理  
    也不能使你们阴暗的心灵燃起火焰。  
你们，更没有闲情逸致  
    探讨圆上的切角线！

J·H·弗里尔 (John Hookham Frere),

---

① 标题“数学与文化”系译者所加，副标题为原标题。——译者注

② 本章曾以《数学与文化——是与非的观念》为题，收入《数学与文化》(邓东皋、孙小礼、张祖贵编，北京大学出版社，1990年)一书中。本章承杨德教授进行过认真校订，特此致谢。——译者注

G·坎宁 (George Canning),

G·埃利斯 (George Ellis)

**数**学一直是形成现代文化的主要力量,同时又是这种文化极其重要的因素,这种观点在许多人看来是难以置信的,或者充其量来说也只是一种夸张的说法。这种怀疑态度完全可以理解,它是一种普遍存在的对数学实质的错误认识所带来的结果。

由于受学校教育的影响,一般人认为数学仅仅是对科学家、工程师,或许还有金融家才有用的一系列技巧。这样的教育导致了对这门学科的厌恶和对它的忽视。当有人对这种状况提出异议时,某些饱学之士可以得到权威们的支持。圣奥古斯丁(St Augustine)不是说过吗:“好的基督徒应该提防数学家和那些空头许诺的人。这样的危险已经存在,数学家们已经与魔鬼签订了协约,要使精神进入黑暗,把人投入地狱。”古罗马法官则裁决“对于作恶者、数学家诸如此类的人”应禁止他们“学习几何技艺和参加当众运算像数学这样可恶的学问”。叔本华(Schopenhauer),一位在近代哲学史上占有重要地位的哲学家,也把算术说成是最低级的精神活动,他之所以持这种态度,是基于算术能通过机器来运算这一事实。

由于学校数学教学的影响,这些权威性的诊断和流行的看法,竟被认为是正确的!但是,一般人忽视数学的观点仍然是错误的。数学学科并不是一系列的技巧,这些技巧只不过是它微不足道的方面:它们远不能代表数学,就如同调配颜色远不能当作绘画一样。技巧是将数学的激情、推理、美和深刻的内涵剥落后的产物。如果我们对数学的本质有一定的了解,就会认识到数学在形成现代生活和思想中起重要作用这一断言并不是天方夜谭。

因此,让我们看一看20世纪人们对这门学科的态度。首先,数学主要是一种寻求众所周知的公理思想的方法。这种方法包括明确地表述出将要讨论的概念的定义,以及准确地表述出作为推理基础的公设。具有极其严密的逻辑思维能力的人从这些定义和公设出发,推导出结论。数学的这一特征由17世纪一位著名的作家在

论及数学和科学时,以某种不同的方式表述过:“数学家们像恋人。……承认一位数学家的最初的原理,他由此将会推导出你也必须承认的一个结论,从这一结论又推导出其他的结论。”

仅仅把数学看作一种探求的方法,就如同把达·芬奇“最后的晚餐”看作是画布上颜料的组合一样。数学也是一门需要创造性的学科。在预测能被证明的内容时,和构思证明的方法一样,数学家们充分地利用了直觉和想像。例如,牛顿和开普勒(Kepler)就是极富于想像力的人,这使得他们不仅打破了长期以来僵化的传统,而且建立了新的、革命性的概念。在数学中,人的创造能力运用的范围,只有通过检验这些创造本身才能决定。有些创造性成果将在后面讨论,但这里只需说一下现在这门学科已有 80 多个广泛的分支就够了。

如果数学的确是一种创造性活动,那么驱使人们去追求它的动力是什么呢?研究数学最明显的、尽管不一定是最重要的动力是为了解决因社会需要而直接提出的问题。商业和金融事务、航海、历法的计算、桥梁、水坝、教堂和宫殿的建造、作战武器和工事的设计,以及许多其他的人类需要,数学能对这些问题给出最完满的解决。在我们这个工程时代,数学是一种普遍工具这一事实更是毋庸置疑。

· 数学的另外一个基本作用(的确,这一点在现代特别突出),那就是提供自然现象的合理结构。数学的概念、方法和结论是物理学的基础。这些学科的成就大小取决于它们与数学结合的程度。数学已经给互不关联的事实的干枯骨架注入了生命,使其成了有联系的有机体,并且还将一系列彼此脱节的观察研究纳入科学的实体之中。

智力方面的好奇心和对纯思维的强烈兴趣,激励许多数学家研究数的性质和几何图形,并且取得了富有创造性的成果。今天很受重视的概率论,就开始于牌赌中的一个问题——一场赌博在结束之前就被迫中止了,那么赌注如何分配才合理?另外一个与社会需要或科学没有什么联系的最突出的成就,就是由古代希腊人做出的:

他们把数学转变成了抽象的、演绎的和公理化的思想系统。事实上,数学学科中一些最伟大的成就——射影几何、数论、无穷量理论和非欧几何,这里我只提到我们将要讨论的内容——都是为了解决纯智力的挑战。

进行数学创造的最主要的驱策力是对美的追求。罗素,这位抽象数学思想的大师曾直言不讳地说:

数学,如果正确地看它,则具有……至高无上的美——正像雕刻的美,是一种冷而严肃的美,这种美不是投合我们天性的微弱的方面,这种美没有绘画或音乐的那些华丽的装饰,它可以纯净到崇高的地步,能够达到严格的只有最伟大的艺术才能显示的那种完美的境地。一种真实的喜悦的精神,一种精神上的亢奋,一种觉得高于人的意识——这些是至善至美的标准,能够在诗里得到,也能够数学里得到。

除了完善的结构美以外,在证明和得出结论的过程中,运用必不可少的想像和直觉也给创造者提供了高度的美学上的满足。如果美的组成和艺术作品的特征包括洞察力和想像力,对称性和比例、简洁,以及精确地适应达到目的的手段,那么数学就是一门具有其特殊完美性的艺术。

尽管历史已清楚地表明,上述所有因素推动了数学的产生和发展,但是依然存在许多错误的观点。有这样的指责(经常是用来为对这门学科的忽视作辩解的),认为数学家们喜欢沉湎于毫无意义的臆测;或者认为数学家们是笨拙和毫无用处的梦想家。对这种指责,我们可以立刻作出使其无言以对的驳斥。事实证明,即使是纯粹的抽象研究,更不用说由于科学和工程的需要而进行的研究了,也是有极大用处的。圆锥曲线(椭圆、双曲线和抛物线)自被发现后的2000多年里,曾被认为不过是“富于思辨头脑中的无利可图的娱乐”,可是最终它却在现代天文学、抛物运动理论和万有引力定律中发挥了作用。

另一方面,一些“具有社会头脑”的作家断言:数学完全或者主

要是由于实际需要,如需要建筑桥梁、制造雷达和飞机而产生或发展的。这种断言也是错误的。数学已经使这些对人类方便有用的东西成为可能,但是伟大的数学家在进行思考和研究时却很少把这些放在心上。有些人对实际应用漠不关心,这可能是因为他们成果的应用在几百年后才实现。毕达哥拉斯(Pythagoras)和柏拉图(Plato)的唯心主义数学玄想,比起货栈职员采用“+”号和“-”号的实际行动来(这曾使某一作家深信“数学史上的一个转折点乃是由日常的社会活动所致”),所做的贡献要大得多。确实,几乎每一个伟大的人物所考虑的都是他那个时代的问题,流行的观点会制约和限制他的思想。如果牛顿早生 200 年,他很有可能会成为一位出色的神学家。伟大的思想家追求时代智力风尚,就如同妇女在服饰上赶时髦一样。即使是把数学作为纯粹业余爱好的富有创造性的天才,也会去研究令专业数学家和科学家感到十分激动的问题。但是,那些“业余爱好者”和数学家们一般并不十分关心他们工作的实用价值。

实用的、科学的、美学的和哲学的因素,共同促进了数学的形成。把这些做出贡献、产生影响的因素除去任何一个,或抬高一个而去贬低另外一个都是不可能的,甚至不能断定这些因素中哪些具有相对的重要性。一方面,对美学和哲学因素作出反应的纯粹思维,决定性地塑造了数学的特征,并且作出了像欧氏几何和非欧几何这样不可超越的贡献。另一方面,数学家们登上纯思维的顶峰不是靠他们自己一步步攀登,而是借助于社会力量的推动。如果这些力量不能为数学家们注入活力,那么他们就立刻会身疲力竭;然后这门学科将处于孤立的境地。虽然在短时期内还有可能光芒四射,但所有这些成就会是昙花一现。

数学的另一个重要特征是它的符号语言。如同音乐利用符号来代表和传播声音一样,数学也用符号表示数量关系和空间形式。与日常讲话用的语言不同,日常语言是习俗的产物,也是社会和政治运动的产物,而数学语言则是慎重地、有意地而且经常是精心设计的。凭借数学语言的严密性和简洁性,数学家们就可以表达和

研究数学思想,这些思想如果用普通语言表达出来,就会显得冗长不堪,这种简洁性有助于提高思维的效率。J·K·杰罗姆(Jerome)曾诉诸于代数符号体系,在下面一段描写中,尽管与数学无关,却清楚地表现了数学的实用性和明了性:

当一个12世纪的青年坠入情网时,他不会后退三步,看着他心爱的姑娘的眼睛,对她说她是世界上最漂亮的人儿。他说他要冷静下来,仔细考虑这件事。如果他在外面碰上一个人,并且打破了他的脑袋——我指另外一个人的脑袋——于是那就证明了他——前面那个小伙子——的姑娘是个漂亮姑娘。如果是另外一个小伙子打破了他的脑袋——你知道不是他自己的,而是另外那个人的——对第二个小伙子来说的另外一个。因为另外一个小伙子只是对他来说是另外一个,而不是对前面那个小伙子——那么,如果他打破了他的头,那么他的姑娘——不是另外一个小伙子,而是那个小伙子,他……瞧:如果A打破了B的脑袋,那么A的姑娘是一个漂亮的姑娘。但如果B打破了A的头,那么A的姑娘就不是一个漂亮的姑娘,而B的姑娘是一个漂亮的姑娘。

简洁的符号能够使数学家们进行复杂的思考时应付自如,但也会使门外汉听数学讨论如坠五里云雾。

数学语言中使用的符号十分重要,它们能区别日常语言中经常引起混乱的意义。例如,英语中使用“is”一词时,就有多种不同的意义。在“他在这儿”(He is here)这个句子中,“is”就表示一种物理位置。在“天使是白色的”(An angel is white)这个句子中,它表示天使的一种与位置或物理存在无关的特征。在“那个人正在跑”(The man is running)这个句子中,这个词“is”表示的是动词时态。在“二加二等于四”(Two and two are four)这个句子中,“is”的形式被用于表示数字上的相等。在“人是两足的能思维的哺乳动物”(Men are the two-legged thinking mammals)这个句子中,“is”的形式被用来断言两组之间的等同。当然,在一般日常会话中引用各种各样不

同的词来解释“is”的所有这些意义,不过是画蛇添足,因为尽管有这些意义上的混乱,人们也不会因此产生什么误会。但是,数学的精确性——它与科学和哲学的精确性一样,要求数学领域的研究者们更加谨慎。

数学语言是精确的,它是如此精确,以致常常使那些不习惯于它特有形式的人觉得莫名其妙。如果一个数学家说:“今天我没看见一个人”(I did not see one person today),那么他的意思可能是,他要么一个人也没看见,要么他看见了许多人。一般人则可能简单地认为他一个人也没看见。数学的这种精确性,对于一个还没有认识到它对于精密思维的必要性的人来说,似乎显得过于呆板,过于拘泥于形式。然而任何精密的思维和精确的语言都是不可分割的。

数学风格以简洁和形式的完美作为其目标,但有时由于过分地拘泥于形式上的完美、简洁和精确,以致丧失了竭尽全力要达到的清晰。假定我们想用一般术语表述图 1 所示的内容,我们很有可能

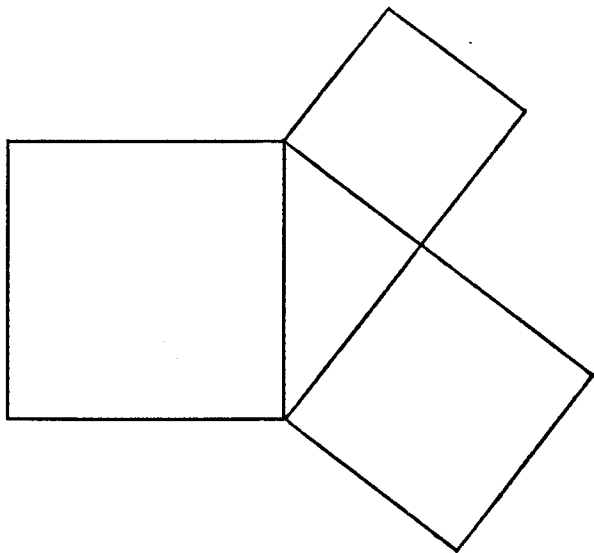


图 1 毕达哥拉斯定理

说：“有一个直角三角形，画两个以该三角形的直角边作为其一边的正方形，然后再画一个以该三角形斜边作为其一边的正方形，那么第三个正方形的面积就等于前面两个正方形面积之和。”但是没有一位数学家会用这样的方式来表达自己的想法。他会这样说：“直角三角形直角边的平方和等于斜边的平方。”这种简洁的用词使表述更为精炼，而且这种数学表达式具有重要的意义，因为它的确是言简意赅。还有，由于这种惜墨如金的做法，任何数学文献的读者有时会发现自己的耐心受到了极大的考验。

数学不仅是一种方法、一门艺术或一种语言，数学还是一门有着丰富内容的知识体系，其内容对自然科学家、社会科学家、哲学家、逻辑学家和艺术家十分有用，同时影响着政治家和神学家的学说；满足了人类探索宇宙的好奇心和对美妙音乐的冥想；有时甚至可能以难以察觉到的方式但无可置疑地影响着现代历史的进程。

数学是一门知识体系，但是它却不包含任何真理。与之相反的观点却认为，数学是无可辩驳的真理的汇集，数学就像是信仰《圣经》的教徒们从上帝那儿获得的最后的启示录一样，这是一个难以消除的、流传甚广的谬论。直到 1850 年为止，甚至数学家们也赞同这种谬论。幸运的是，19 世纪发生的一些数学事件（这些我们随后将进行讨论）向这些数学家表明，这种看法是错误的。在这门学科中没有真理，而且在它的一些分支中的定理与另外一些分支中的定理是矛盾的。例如，上个世纪创立的几何中所确定的一些定理，与欧几里得（Euclid）在他的几何学中所证明的定理就是矛盾的。尽管没有真理，数学却一直给予了人类征服自然的神奇的力量。解决人类思想史上这个最大的悖论将是我们所关注的课题之一。

由于 20 世纪必须将数学知识与真理区分开，因此也必须将数学与科学区分开，因为科学确在寻求关于物质世界的真理。然而数学却无疑地是科学的灯塔，而且还继续帮助科学获得在现代文明中所占的位置。我们甚至可以正确地宣称，正是由于有了数学，现代科学才取得了辉煌的成就。但是我们将会看到，数学与自然科学这两大领域具有各自独特的性质。

在最广泛的意义上说,数学是一种精神,一种理性的精神。正是这种精神,激发、促进、鼓舞和驱使人类的思维得以运用到最完善的程度,亦正是这种精神,试图决定性地影响人类的物质、道德和社会生活;试图回答有关人类自身存在提出的问题;努力去理解和控制自然;尽力去探求和确立已经获得知识的最深刻的和最完美的内涵。在本书中,我们最为关心的将是这种精神的作用。

数学的另一个更加典型的特征与我们的论述关系最为密切。数学是一棵富有生命力的树,她随着文明的兴衰而荣枯。它从史前诞生之时起,就为自己的生存而斗争,这场斗争经历了史前的几个世纪和随后有文字记载历史的几个世纪,最后终于在肥沃的希腊土壤中扎稳了生存的根基,并且在一个较短的时期里茁壮成长起来了。在这个时期,它绽出了一朵美丽的花——欧氏几何,其他的花蕾也含苞欲放。如果你仔细观察,还可以看到三角和代数学的雏形;但是这些花朵随着希腊文明的衰亡而枯萎了,这棵树也沉睡了一千年之久。

这就是数学当时的状况。后来这棵树被移植到了欧洲本土,又一次很好地扎根在肥沃的土壤中。到公元 1600 年,她又获得了在古希腊顶峰时期曾有过的旺盛的生命力,而且准备开创史无前例的光辉灿烂的前景。如果将 17 世纪以前所知道的数学称为初等数学,那么应该说,初等数学与从那以后创造出的数学相比是微不足道的。事实上,一个人拥有牛顿处于顶峰时期所掌握的知识,在今天不会被认为是一位数学家。因为与普通的观点相反,现在应该说数学是从微积分开始的,而不是以其为结束。在我们这个世纪,这门学科已具有非常广泛的内容,以致没有任何数学家能够宣称他已精通全部数学。

数学发展的这幅素描,尽管简略,但却表明数学的生命力正是根植于养育她的文明的社会生活之中。事实上,数学一直是文明和文化的重要组成部分,因此许多历史学家通过数学这面镜子,了解了古代其他主要文化的特征。以古典时期的古希腊文化为例,它大约从公元前 600 年延续到公元前 300 年。由于古希腊数学家强调

严密的推理以及由此得出的结论,因此他们所关心的并不是这些成果的实用性,而是教育人们去进行抽象的推理,和激发人们对理想与美的追求。因此,看到这个时代具有后世很难超越的优美文学,极端理性化的哲学,以及理想化的建筑与雕刻,也就不足为奇了。

数学创造力的缺乏也表现出一种文明的文化特征,这也是事实。看看罗马的情况吧。在数学史上,罗马人在一定时期内曾做出过贡献,但从那以后他们就开始停滞不前了。阿基米德,最伟大的古希腊数学家和科学家,在公元前 221 年被突然闯入的罗马士兵杀害了,当时他正在研究画在沙盘中的几何图形。对此,A·N·怀特海说过:

阿基米德死于一个罗马士兵之手,是世界发生头等重要变化的一个标志;爱好抽象科学、擅长推理的古希腊在欧洲的霸主地位,被重实用的罗马取代了。L·比肯斯菲尔德(Lord Beaconsfield)在他的一部小说中,曾把重实用的人称为重复其先辈错误的人。罗马是一个伟大的民族,但是他们却由于只重实用导致了创造性的缺乏而受到了人们的指责。他们没有发展其祖先的知识,他们所有的进步都局限于工程技术的细枝末节。他们并不是那种能够提出新观点的梦想家,这些新观点能给人以更好地主宰自然界的力量。没有一个罗马人因为沉湎于数学图形而丧命。

事实上,西塞罗(Cicero)夸耀自己的同胞——感谢上帝——不是像希腊人一样的梦想家,而是把他们的数学研究派上实际用场的人。

注重实用的罗马帝国,将其精力用于权术和征服外邦。为迎接军队胜利归来的拱形的凯旋门,也许是罗马帝国的最好象征,但它们不是显得优雅得体,而是显得毫无生气。罗马最突出的特征也许是麻木不仁,罗马人几乎没有真正的独创精神。简言之,罗马文化是外来的,罗马时期的大多数成就主要渊源于小亚细亚的希腊,此时小亚细亚的希腊正处于罗马政权统治之下。

这几个例子告诉我们，一个时代的总的特征在很大程度上与这个时代的数学活动密切相关。这种关系在我们这个时代尤为明显。在不抹煞历史学家、经济学家、哲学家、作家、诗人、画家和政治家功绩的前提下，我们可以这样说：其他文明已经产生了在能力和成就方面同等的效果。另一方面，尽管欧几里得和阿基米德无疑是极其卓越的思想家，尽管我们的数学家得以达到更高的水平，这仅仅是因为像牛顿所说的那样，他们是站在巨人的肩膀上。然而，正是在我们这个时代，数学才发展到了它应该扩展的范围，而且有着不同寻常的用途。这样，由于数学已经广泛地影响着现代生活和思想，今天的西方文明与以往任何历史上的文明都有着明显的区别。也许，在这本书中，我们会看到现在这个时代是如何受惠于数学的。