

译者前言——

论莫里斯·克莱因的数学哲学思想^①

张祖贵

莫里斯·克莱因(Morris Kline, 1908—1992)是美国著名的应用数学家、数学教育家、数学史学家和数学哲学家。他于1936年在纽约大学获得数学方面的哲学博士学位。1936—1938年任普林斯顿高等研究院助理研究员,1942—1945年以物理学家身份供职于美国陆军通信部队。除此之外,他的绝大部分时间是在纽约大学从事研究与教学工作。他还执教于斯坦福大学,美国和德国的一些科研与教学机构也不时聘请他。他一直是德国古根海姆(John Simon Guggenheim)荣誉研究员和富布赖特(Fulbrighter)讲座主持人。他曾担任纽约大学柯朗数学科学研究所电磁研究部主任长达20年,担任纽约大学研究生数学教学委员会主席11年。他拥有无线电工程方面的多项发明专利。M·克莱因曾是纽约大学柯朗数学科学研究所退休教授,《数学杂志》(*Mathematics Magazine*)和《精密科学的历史档案》(*Archive for History of Exact Sciences*)两家刊物的编委。

《古今数学思想》^②(*Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, 1972)是M·克莱因的代表作,不仅在科学界,而且在整个文化界都颇有影响。长期以来,他对数学哲学进行了深入研究,从多方面、多层次提出了许多新颖、独特的观点。主要代表著作

^① 本文原载《自然辩证法通讯》1989年第6期。此次收入时略有增补。

^② 台湾九章出版社1979年出版了该书中译本《数学史——数学思想的发展》(林炎全、洪万生、杨康景松译)。同年,上海科学技术出版社出版了该书中译本《古今数学思想》(北京大学数学系组织翻译)。

有：《数学与物理世界》(*Mathematics and the Physical World*, 1959)、《数学：确定性的丧失》(*Mathematics: The Loss of Certainty*, 1980)、《西方文化中的数学》(*Mathematics in Western Culture*, 1953)、《数学：一种文化探索》(*Mathematics, A Cultural Approach*, 1962)、《数学与对知识的探索》(*Mathematics and the Search for Knowledge*, 1985)。在轰轰烈烈的“新数学”运动中，他从数学哲学、数学历史的角度阐述了自己对数学教育改革的态度，发表了一系列著作：《为培养通才的数学》(*Mathematics for Liberal Arts*, 1967)、《为什么约翰不会做加法：新数学的失败》(*Why Johnny Can't Add: The Failure of the New Mathematics*, 1973)、《为什么教授不能教书》(*Why the Professor Can't Teach?* 1977)。

由于M·克莱因的主要研究领域是在应用数学和电磁学方面，因此他并不像当代许多数学哲学家一样直接从事数学基础(如数理逻辑等)的研究，也不像维特根斯坦(Wittgenstein)、拉卡托斯(Lakatos)等人从哲学研究的角度审视数学。但是，这并不妨碍他的数学哲学研究。他以自己独特的数学研究感受，对数学历史的深入研究和认识，对数学基础问题、数学本体论问题、数学真理性问题、数学文化等一系列数学哲学的基本方面进行了认真研究，在学术界产生了深远影响。

(一) 作为数学哲学出发点的数学史观

在《古今数学思想》和《数学：确定性的丧失》两书序言的题头，克莱因都引用了H·庞加莱的名言：“如果我们想要预见数学的将来，适当的途径是研究这门科学的历史和现状。”他的数学哲学研究工作，就是按照这样的精神进行的。无论是在刚才提到的两书中(《古今数学思想》本身就是数学史专著)，还是在《数学与物理世界》、《西方文化中的数学》中，都是以数学史为经线，按照历史的线索阐述自己的观点。在这个意义上，他可以称得上是科学哲学中标

准的历史主义学派代表。

在纽约大学柯朗数学科学研究所,他与希尔伯特的学生 R·柯朗(Courant, 1888—1972)关系十分密切,这使得他也深受格丁根(Göttingen)大学数学传统的影响,注重研究数学史。在数学史的研究中,他除了关注重大的数学创造和发展以外,极度关心的问题就是:对数学本身的看法,不同时期这种看法的转变,以及数学家对于他们自己的成就的理解等^①——而这些就是数学哲学所研究的问题。他认为,数学的历史发展与数学哲学有关问题的逻辑发展,如数学与外部世界、数学真理论、数学文化的发展有着惊人的一致性,因此他在论述这些问题时倾向于采用历史的方法。在他看来,历史的方法是考察思想如何产生、是什么激发了对这些思想的研究以及这些思想是如何影响其他领域的最恰当的方法。他在谈到用历史方法探讨数学文化时说到,这样将会使人们了解到“数学作为一个整体是如何发展的,数学的活跃时期和沉寂时期与相应的西方文明发展时期的关系怎样,以及文明的进程如何影响数学的内容和实质”^②。数学史是他研究数学哲学的基本出发点。

那么,克莱因的数学史观是怎样的呢?从数学哲学研究方面来看,数学史可以为其提供广阔、真实的背景。例如,数学教育使人觉得数学真理是天经地义的,但是,只要考察数学史就可以认识到,这种认识并非正确。数学的历史告诉人们:“数学的展开不是逻辑的。把直觉、巧妙的推测、纯粹形式上的运算(不加批判地使用)和一些物理论证拼凑起来,便引导着数学家们去肯定他们所谓的‘定理’。”^③算术、代数、微积分以及大部分数学分析的发展史都证明了这一点,所以,数学哲学的诸多基本问题,在数学发展的历史中就已经显现出来了。

克莱因在看待数学历史发展时,主张历史渐变论。他认为,数学历史告诉人们,数学中的各个分支的发展是由汇集不同方面的成

① M·克莱因:《古今数学思想》第1册,上海科学技术出版社,1979年,序IV页。

② 见本书第vii页。

③ M·克莱因:“数学的基础”(上),《自然杂志》,1979年第4期,第229页。

果,点滴积累而成的,常常需要几十年,甚至几百年的努力才能迈出有意义的几步。当然同时他也肯定集大成者的决定作用。在评价微积分的发展与牛顿在这一发展中的作用时,他明确地表明了这一观点。他说:“数学和科学中的巨大进展,几乎总是建立在几百年中做出一点一滴贡献的许多人的工作之上的。需要有一个人来走那最高和最后的一步,这个人要能足够敏锐地从纷乱的猜测和说明中清理出前人的有价值的说法,有足够的想像力把这些碎片重新组织起来,并且足够大胆地制定一个宏伟的计划。在微积分中,这个人就是伊萨克·牛顿。”^①他的这一观点,在他整个数学史研究中显得十分突出。

由于他的这种渐变论观点,因此在他的数学史研究中,同时也在他的数学本体论、数学真理论、数学文化的研究中,占据主导地位的就是数学课题,而不是数学家。他认为,数学的每一个分支打上了它的奠基者的烙印,并且杰出的人物在确定数学的进程方面起决定性作用。但是,即使研究数学家,特意叙述的也是他们的思想,传记完全是次要的。在这方面他特别欣赏帕斯卡的一句话:“当我们援引作者时,我们是援引他们的证明,不是援引他们的姓名。”因此,在他的著作中,数学课题的研究、数学思想的研究远远超过对数学家本人的研究。如在“形式主义与集合论基础”一章中,他对希尔伯特这位 20 世纪的伟大数学家,并没有研究多少生活状况,而是着重剖析其思想。在对希尔伯特的“有限性”思想进行分析时,他指出,希尔伯特“有限性”思想相当混乱,如希尔伯特在 1925 年认为命题“如果 P 是一个素数,则存在一个比 P 大的素数”是一个非有限性的命题,而认为命题“如果 P 是一个素数,则在 P 与 $P! + 1$ 之间存在一个素数”是一个有限性的命题。而在 1934 年的论文中,希尔伯特又提出了另外一套标准^②。因此,克莱因认为,数学家的思想应是数学史的核心,因为它是数学课题的主要的、真正富有活力的、反映

① M·克莱因:《古今数学思想》第 2 册,第 65—66 页。

② M. Kline, *Mathematics: The Loss of Certainty*, p. 250.

数学本来面目的组成部分。

春天的紫罗兰到处开放。在本质上,克莱因相信数学历史发展有其固有的规律性。与崇尚数学思想而不过分崇尚一个个具体的数学家的思想一致,他总是试图说明每一项重大数学发明的前因后果,而这种因果关系在他看来完全可以从科学、数学发展中找出。正因为如此,他对数学史上的优先权之争持一种“多元”、“两可”的态度。在对待非欧几何的优先权时,他的这种态度最为明显。他写道:“任何较大的数学分支甚或较大的特殊成果,都不会只是个人的工作。充其量,某些决定性步骤或证明可以归功于个人。这种数学积累的发展特别适用于非欧几何。如果非欧几何的诞生是指人们认识到除了欧几里得几何之外还可以有他种几何的话,那么它的诞生应归功于克吕格尔(Klügel)与兰伯特(Lambert)。如果非欧几何意味着,一系列包括异于欧氏平行公理的公理系统推论的技术性推导,那么最大的功绩必须归于萨凯里(Saccheri),即便是他也利用了很多人的寻求更易于接受的代换欧氏公理上的工作。然而有关非欧几何最大的事实是它可以描述物质空间,像欧氏几何一样地正确……这种认识,不需要任何技术性的数学推导(因已有人做过),首先是由高斯(Gauss)获得的。”^①在研究变分法的历史时,他对优先权也是持这种态度。我们认为,这种态度对于数学思想史来说,也许更接近历史的真相。

作为一位数学家,克莱因认为,数学史对于专业的数学家和未来的数学家都有帮助。在他看来,历史背景是很重要的。现代数学已经出现了成百上千的分支,全能的数学家已极难出现,为了能了解数学的重大问题和目标,从而能对数学发展的主流做出贡献,最稳妥的办法也许就是要对于数学的过去成就、传统和目标有一定的了解,以使自己的研究工作能被导入有成果的渠道。为了实现这样的愿望,他的数学史著作作为数学家的工作提供了十分翔实的背景,正因为如此,《古今数学思想》被人评论为:“就数学史而论,这是迄

① M·克莱因:《古今数学思想》第3册,第285—286页。

今为止最好的一本。”

作为一位数学教育家,克莱因对数学史在数学教育中的作用寄予了极高的愿望。格丁根大学的传统使得他和柯朗都非常注重数学教育。在他们看来,通常数学教科书所介绍的是一些没有什么关系的数学片断,它们给出一个系统的逻辑叙述,使人们产生了这样的错觉,似乎数学家们几乎理所当然地从定理到定理,数学家们能克服任何困难。而且课本字斟句酌的叙述,不能反映数学家们艰难的探索过程^①,所有这些对于培养真正的富有创造力的数学家都是极其不利的。不仅如此,他们还对世界范围内的数学教育深感担忧。柯朗在为克莱因的《西方文化中的数学》写的序言中指出:“科学家们与世隔绝的研究,教师们少得可怜的热情,还有大量枯燥乏味、商业气十足的教科书和无视智力训练的教学风气,已经在教育界掀起了一股反数学的浪潮。然而,我们深信,公众依然对数学有浓厚的兴趣。”^②为了扭转这种状况,克服数学教科书和数学教学中的诸多弊端,克莱因认为数学史能起到有效的作用。数学史可以提供整个课程的概况,使课程的内容互相联系;并且与数学思想的主干联系起来;数学史可以让学生们看到数学家们的真实创造历史——如何跌跤、如何在迷雾中摸索前进,从而鼓起研究的勇气;从历史的角度来讲解数学,是使人们理解数学内容和鉴赏数学魅力的最好的方法之一。他的这一良苦用心,今天已得到了越来越多的人士的认可。

正是从对数学历史的考察中与对数学教育特点的思考中,使克莱因认识到,学生学习数学的过程与数学发展的历程有一定的类似性,即遵从生物发生学的一个基本规律:个体的成长要经历种族成长的所有阶段,顺序相同,只是所经历的时间缩短。由此出发,他认为“新数学”过分强调逻辑教学,有悖上述规律,因此注定了要失败。他在《为什么约翰不会做加法:新数学的失败》中,就是通过历史考

① M·克莱因:《古今数学思想》,序言 vi—vii。

② 见本书第v页。

察对“新数学”运动提出了尖锐的批评：“由于新数学的主要革新是将演绎法用于一般的数学科目上，我们要确定的是在数学方法上，特别在能否增进学生对数学的理解上，究竟有什么优点？经多方面的考量，不能不说这一问题的答案是否定的。首先，让我们了解数学本身的发展及其发展历史上，是否提供任何有助于我们判断的证据。毕竟数学是由了解数学的人所创建，且看欧几里得、阿基米德、牛顿、欧拉及高斯等大师是如何懂得数学的？”“直到19世纪后期，数学、代数、分析（微积分及其延展）的逻辑基础才开始建立，这一层至关重要。换句话说，多少世纪以来，数学的各主要分科的建立，几乎全未依赖逻辑发展。伟人的直觉显然比逻辑更有力量。”“从上述历史能推断出什么结论？最具有直觉意义的概念，像整数、分数及几何概念最先被接受及运用，似乎明白不过。较少直觉的概念，像无理数、负数、复数、用字母做一般系数以及微积分等概念的建立和被接受，则各需许多世纪。……直觉凭证诱导数学家加以接受，逻辑的到来通常迟于创建以后很久，并且很不容易。数学的历史虽未证明，但已提示我们逻辑方法远较困难。”^①近年来，数学教育中越来越重视数学史，实与柯朗、克莱因等人的呼吁有一定联系。

不考虑数学史的数学哲学是苍白无力的。在数学哲学家探讨数学的方法中，数学史提供了一种最实际、最有效的方法。克莱因准确地把握了这一点。

（二）数学与物理世界——数学本体论

数学研究对象的本体论问题，在很大程度上讨论的就是数学概念是否反映客观的真实实在这一问题^②。克莱因，作为一位应用数学家和数学哲学家，当然非常关注数学本体论，不过他将问题稍微作了一点变换。他在讨论数学本体论时，主要讨论数学与物理世界

① 转引自洪万生：《从李约瑟出发》，第12—13页。

② 夏基松、郑毓信：《西方数学哲学》，人民出版社，1986年，第201页。

的关系问题。当然这不仅仅因为他为此写了一本专著《数学与物理世界》，而且他在讨论数学真理性等问题时，都主要以数学与物理科学发展的关系来说明数学与客观真实实在的关系。

从学术流派上来分，在数学本体论观点上，克莱因有着较明显的形式主义数学观，认为数学命题是按照一定法则组成的符号系列，数学家有创造数学结构的自由。他对实在论，即数学的研究对象是一种独立于人类认识的客观存在的观点，持较明确的反对态度。我认为，他在数学本体论方面的这一观点，相当准确地反映了数学发展的实质，值得引起我们的重视。

《数学与物理世界》一书的目的之一，就是展示数学在研究自然时的作用，从中人们可以看到数学是怎样成为以及为什么会成为科学理论的核心^①。从欧氏几何对物理空间的描述，圆锥曲线理论应用于近代天文学理论，微积分对于近代科学发展的决定性影响，直到麦克斯韦的电磁学微分方程组、广义相对论所利用的黎曼几何，似乎都在证实，而且在不断证实：上帝在一开始就创造了数学，然后再按照数学定律创造了宇宙和地球^②；数学是关于客观现实世界的数量关系和结构关系的一门科学。但是，克莱因对于数学与物理科学发展的历史进行了详细的分析后，再结合现代数学的特点和本质，却宣告：这种观点是站不住脚的。但是，他没有否认数学对于科学（主要是物理科学）的极其有效的作用，而是给出了独到的分析。

在克莱因看来，数学不包含真理（这是他的真理观，下面将详细论述），因此就没有必要解释数学是如何产生真理的，而只需要阐释物理世界和数学描述两者之间的关系。这种关系怎样呢？他认为主要体现在这样几个方面：

（1）数学开始于选择某些在研究物理世界时所出现的概念，如数的概念和几何学中的一些概念；

① M. Kline, *Mathematics and the Physical World*, 序 viii 页。

② 同上书, p. 467。

(2) 在数学应用于物理世界的过程中,最富有成果的是某些非数学公理也进入到这一过程,如牛顿数学力学体系中的运动定律和万有引力定律;

(3) 将数学方法应用于自然界时,数学家和科学家得到新的结论的途径有明显的区别,数学家们诉诸于逻辑演绎,而科学家则依靠观察和实验来验证数学结论^①。

在这些关系中,有什么能够确保数学准确地反映客观实在呢?没有!但是,数学发展和科学发展的历史却一再表明,数学对于科学发展是异常有用的,怎么解释呢?克莱因老老实实承认,数学陈述对物理世界的分析的有效性是不可解释的,正如世界本身的存在性和人的存在性一样^②。

不仅如此,他甚至认为数学对科学发展的作用与日俱增,它不仅满足了科学的需要,而且指明了科学发展的方向,为人类认识自然、把握自然提供了最重要的方法。在他看来,这都是由于数学中非欧几何等重大变革所造成的。他强调指出:“非欧几何的出现不仅没有摧毁数学的这种价值和它的结论的可信性,而且令人难以置信地增加了它的作用,因为数学家感觉到了迅速研究新思想的自由,而且发现它们是十分有用的。”^③

克莱因认为,在非欧几何被人们认可以前,人们对数学与物理世界关系的认识都是错误的。他在评价 19 世纪的数学时指出:“从数学未来发展的角度看,这个世纪发生的最重要的事情是,获得了数学与自然界的关系的正确看法。”^④这些看法是,数学是与自然界里的概念和法则全然不同的;数学具有一定程度的人为性(artificiality);数学能够引进并研究一些相当任意的概念和理念,它们或者像四元数那样没有直接的物理解释,但却是有用的,或者像 n 维空间几何那样,满足一种普遍性的要求;数学与其他领域的区别

① M. Kline, *Mathematics and the Physical World*, pp. 469—470.

② 同上书, pp. 471—472.

③ 同上书, p. 465.

④ M·克莱因:《古今数学思想》第3册,第101页。

在于它自由地创造自己的概念,而无需顾及是否实际存在,等等。总之,这种正确的看法是充分认识到数学是人的创造物,认识到必须将数学知识与真理区分开,因为科学的确是在寻求关于物质世界的真理,因此也必须将数学与科学(至少是自然科学)区分开^①。这样,我们就看到,克莱因抛弃了数学实在论。

克莱因说:“(数学)真理神圣性的丧失,似乎解决了关于数学的本质这一个古老问题。数学是像高山、大海一样独立于人而存在,还是完全是人的创造物呢?换句话说,数学究竟是数学家们经过辛勤劳动挖掘出的深藏了若干世纪的宝玉,还是他们制作出的一块人造的石头呢?”在他看来,答案是十分明显的。尽管有各种各样的实在论观点,然而“数学的确似乎是人造的、易犯错误的思想的产物,而不是独立于人的永恒世界中的东西;数学并不是建立在客观现实基础上的一座钢筋结构,而是人在思想领域中进行特别探索时,与人的幻想连在一起的蜘蛛网”^②。在他看来,数学本体论问题获得了一种全新的解决。

那么,怎样看待数学发展与物理世界的关系呢?他认为,即使是牵涉到像几何空间这样的理论,应该首先接受这样的事实:以物理空间为基础的思想体系(这是一种数学理论)与物理空间是不同的。然后我们所采取的态度是,把任何关于物理空间的理论(欧氏几何也好,非欧几何也好)都作为一种纯粹的主观构造,而不要责备它与现实相悖。人创造出一种几何,欧氏几何或非欧几何,然后由此决定他的空间观念。这样的好处是,尽管不能肯定空间具有客观的某些特征,但是人们却能对空间进行思考,并且在科学研究中利用这种理论。在他看来,如此这般建立的数学理论并不否认存在诸如客观物质世界这样的内容,它仅仅强调了这样的事实:人们关于物理世界的判断,所获的结论纯粹是自己的创造。

那么这种创造怎么可能会对人类认识客观世界发挥作用呢?

① 本书第 8 页。

② 本书第 430 页。

对此,克莱因从三方面给出了回答。

(1) 人的自由创造是否“有用”,是一个长期的历史过程,一时的“功利”标准,可能会断送极富创造力的数学成果。如圆锥曲线论、群论、黎曼几何在刚产生时不是一种自由创造吗?可它们后来不都发挥了巨大的作用吗^①?

(2) 数学研究并不是对自然的记录,而即使是用于自然界也只是对自然的阐释。任何阐述都有可能出错。现代科学哲学分析表明,就是实证科学理论在本质上也具有“可证伪性”,何况数学呢?不仅如此,数学由于是一种“自由创造”的产物,当它在阐述物理世界失却意义或出现错误时,人们就不应问,这种数学理论是怎么回事?而应该问,为了使它继续有意义,什么样的假定才是方便的?

(3) 从实际效果来看,存在这样的悖论:尽管没有真理,数学却一直给予了人类征服自然的神奇力量。他引用A·N·怀特海(A. N. Whitehead, 1861—1947)的话来表明自己的观点:“没有什么比这一事实更令人难忘的了,数学脱离现实而进入抽象思维的最高层次,当它返回现实时,在对具体事实分析时,其重要性也相应增强了。……最抽象的东西,是解决现实问题最有力的武器,这一悖论已完全为人们接受了。”数学发展史表明,正是由于有了自由创造的数学,科学才取得了辉煌的成就,这一事实本身就足以证实无需为数学的作用担心。他因此而强调指出数学是科学的灯塔^②。

数学是否反映客观实在这个数学本体论问题,在克莱因看来答案是否定的,或者是不可说的。他所持的是一种典型的乐观的工具主义态度。数学只是科学的一种工具,而且是一种不完备的工具。“我们正在利用不完善的工具创造奇迹吗?”数学与物理世界的关系恐怕就是如此。

后来,克莱因继续探讨这一问题,认为数学在探索知识方面有其重要作用。我们可以从他1985年出版的《数学与对知识的探索》

① M. Kline, *Mathematics and the Physical World*, pp. 472—473.

② 本书第8页。

一书的目录中看出他的观点：

序言：历史回顾：存在一个客观世界吗？

1. 感觉与直觉失灵
2. 数学的兴起与作用
3. 古希腊的天文世界
4. 哥白尼与开普勒的日心学说
5. 数学支配物理科学
6. 数学与神秘的万有引力
7. 数学与非感觉的电磁世界
8. 相对论的序幕
9. 相对论世界
10. 物质的解体：量子理论
11. 数学物理的真实性
12. 数学为什么会有效
13. 数学与大自然的行为

这部著作^①可以说代表了他对数学作用的最终定型的观点，即数学主要是用于对知识的探索。不过，应该清楚的是，探索知识与揭示出自然界的真实性相去甚远。克莱因的一个基本观点是，关于自然界的知识——科学理论，仅仅只是我们对世界的一种认识，一种解释，与自然界本身完全是两回事^②。牛顿力学、相对论、量子论等一切知识，都不能说已揭示了自然界的真面目，因此，利用数学去探索知识将是一个永无止境的活动。

（三）丧失了确定性——数学真理论

在数学真理性问题上，克莱因的观点十分明确：“数学自命为真

① M. Kline, *Mathematics and the Search for Knowledge*, Oxford University Press, 1985.

② 同上书, pp. 210—227。

理的态度已经是必须抛弃的了。”^①“数学是一门知识体系,但是它却不包含任何真理。与之相反的观点却认为,数学是无可辩驳的真理的汇集,数学就像是信仰《圣经》的教徒们从上帝那儿获得的最后的启示录一样,这是一个难以消除的、流传甚广的谬论。”^②更有甚者,1980年他干脆写了一本书:《数学:确定性的丧失》,系统地阐述数学是怎样和为什么丧失真理性的。

的确,克莱因否认数学具有真理性,但是却不能认为他坚持数学真理问题上的悲观主义。因为否认数学具有真理性,并不一定对数学持一种悲观态度。至少对于他来说不是这样。正好相反,他认为,数学丧失了确定性和真理性,但并没有降低数学的作用,而是在某种程度上给数学发展注入了活力。数学获得了新的自由,数学发展仍具有广阔的前景。我认为,这就是克莱因的数学真理论的主要观点。

克莱因从数学发展的历史出发,详尽地论证了数学真理性的产生、鼎盛、丧失的过程。我们认为,这种方法对于人们了解他的观点是十分有利的,从中我们也可以真正理解他所强调的“确定性的丧失、真理性的丧失”的涵义。

数学真理性的产生。这是古希腊文明对于人类文明的最大贡献。毕达哥拉斯学派和柏拉图学派促进了人类对数学真理性的认可^③。物质世界转瞬即逝,只有理念才是永恒的,而认识理念的惟一途径就是数学,因而数学就成了真理的总汇,数学真理性由此产生了。

数学真理性结出了果实。这个果实就是近代科学的诞生。开普勒、笛卡儿、伽利略的数学宇宙观是其主要代表。科学必须是寻求数学解释和描绘,这比物理解释更重要。《自然哲学的数学原理》是最主要的代表成就,数学研究的主要目的是得到更多的自然界定

① M·克莱因:“数学的基础”(下),载《自然杂志》1979年第5期,第305页。

② 本书第8页。

③ M. Kline, *Mathematics: The Loss of Certainty*, pp. 16—17.

律,更深入地了解自然设计的真相^①。

第一次冲击:数学真理的毁灭。非欧几何和四元数理论的出现使人们认识到,外部物质世界遵循数学定律的信念被摧毁了^②。欧氏几何、非欧几何(各种)至少是部分地互相矛盾,但居然都能用来描述物理空间,人们真不知道对于物理空间来说,究竟哪一种是真的。一向宣称是描述数量和空间真理的数学,现在怎么出现了几种相互矛盾的几何学呢?这样就迫使人们不能不承认这样的事实:所有的几何学都可能是一种“假设”^③。

数学体现出符合逻辑的学科的不合逻辑的发展。数学是一门讲究逻辑严密性的学科,但它的发展却是极其不合逻辑的。负数、复数的各种理论已经十分发达了,但数学家们还没有找到有理数、复数的逻辑基础。

不合逻辑的发展:分析学的困境。分析学的主体——微积分、微分方程、函数论已经取得了令人瞩目的成果,但人们还在为极限理论煞费苦心。进入19世纪后,人们才在为已蓬勃发展的数学寻找基础^④。

不合逻辑的发展:伊甸乐园的入口处。到1900年时,经过艰苦努力,在自然数公理的基础上,算术、代数和分析严密化了,在关于点、线和其他几何概念公理的基础上,几何学也被严密化了。有人兴高采烈地说:“绝对的严密已经达到了。”人们仿佛站到了伊甸园的大门口。

伊甸园关闭了大门:推理的新危机。正当人们自鸣得意的时候,集合论中出现了悖论,数学基础受到了严重挑战,数学家们不得不重新审视数学基础。

于是,为了重建数学基础和解决数学的矛盾,人们开始从4个方面对基础的根本问题提出解答——集合论的公理化、逻辑主义、

① M. Kline, *Mathematics: The Loss of Certainty*, p. 61.

② 同上书, p. 75.

③ 本书第429页。

④ M. Kline, *Mathematics: The Loss of Certainty*, pp. 153—171.

直观主义和形式主义,它们对数学的理解都不相同,但是他们都没有达到目的,都没有能够对数学提供一个可以普遍接受的途径。不仅如此,1931年哥德尔的不完全性定理对这些数学基础工作又投下了阴影。数学似乎又面临着灾难,处于孤立无援的境地。

因此,不仅数学丧失了揭示客观实在的真理性,就是数学本身是否具有严密的基础都成了严重的问题。数学在这双重意义上都丧失了确定性,现在数学该向何处去?! 人类理性的骄傲和最富有魅力的成果黯然失色了。

以上就是克莱因所描述的数学确定性丧失的历程。我认为,按照克莱因的这种分析,数学对自然界真理的确定性和数学自身的确定性无可挽回地丧失了,不愿意承认这样的现实或否认确定性丧失的必然性,很难说是明智的或尊重历史的态度。问题的关键是,对于数学确定性的丧失,我们应该持一种什么样的态度。

克莱因承认,数学真理性的丧失增加了数学和科学关系的复杂性,数学本身的危机也使得人们对将数学方法应用于文化的许多领域如哲学、美学等领域持更加慎重的态度^①,把数学当作真理化身的时代一去不复返了。

但是,这并不能降低数学的作用,实际上也没有降低数学的作用。进入20世纪后,数学在描述和探索物理现象、社会现象时的作用以前所未有的速度扩大了。这一切,在克莱因看来,都与数学真理性的丧失不无关系。克莱因认为,数学真理性的丧失使数学获得了自由,“现在,这一点似乎已经很清楚了,数学家们应该探索任何可能的问题,探索任何可能的公理体系,只要这种研究具有一定的意义;运用于现实世界的这一数学研究的动力,依然为人们所遵从。数学史上的这一阶段(指非欧几何使数学丧失真理性)使得数学摆脱了与现实的紧密联系,使数学自身从科学中分离出来了,就如同科学从哲学中分离出来,哲学从宗教中分离出来,宗教从万物有灵论和迷信中分离出来一样。……1830年以前,数学家的处境可以比

^① M. Kline, *Mathematics: The Loss of Certainty*, p. 7.

作是一位非常热爱纯艺术,而又不得不接受为杂志绘制封面的艺术家。从这种限制中解脱后,艺术家就可以无限制地发挥他的想像力和创造力,创造出众多的作品。非欧几何正是这种解脱的因素。”^①他认为,自19世纪中叶以来,数学活动的大量扩张,数学家工作动力的多元化,就是新的数学影响的例证。这种分析以及比喻,是十分贴切的,而且符合数学发展的现状。

在此有必要把克莱因对B·罗素的一段名言的诠释在这里介绍一下。罗素曾说过一段看似无理、实则充满睿智的话:“数学可以定义为这样一门学科:我们不知道在其中说的是什么,也不知道我们说的是否正确。”克莱因认为,这是罗素用生动的语言对数学在20世纪与科学的关系,或者说纯粹数学与应用数学关系的最好描述。数学家们不知道自己所说的是什么,是因为纯数学与实际意义无关;数学家们不知道所说的是否正确,是因为作为一位数学家,他们从不费心去证实一个定理是否与物质世界相符,对这些定理我们只能问也只需问它是否是通过正确的推理得来的^②。长期以来,我们总认为罗素的这段话是在宣扬不可知论,实际上是我们自己没能理解这段话的背景,同时也由于没有从数学丧失了真理性这一角度来认识这句话的实质。

对于数学本身的基础问题,他也持一种尊重现实的、豁达的态度。认为“我们必须承认严格性并不是现实,而是人们可以接近的一个目标,可能是永远达不到的目标。我们必须经常努力加强我们已有的东西,但是没有希望达到完善的目的。历史的教训是:力求达到这一不可能达到的目标,我们能继续产生一些卓越而有用的著作,这样的著作曾经造成了数学的过去光荣。即使失掉了幻想,我们仍能继续从事于数学”^③。正因为数学是一种人的自由创造,因此它就永远富有魅力,我们有什么理由对它的前途悲观呢?

数学丧失了确定性、真理性,因此区分“纯”数学与“应用”数学

① 本书第430—431页。

② 本书第461页。

③ M·克莱因:“数学基础”(下),《自然杂志》1979年第5期,第306页。

就是十分重要的问题。数学在不停地前进,本身是如此,应用范围也在不断扩大。确定性、真理性在数学中丧失了,从另一方面又获得多元确定性、真理性。

(四) 数学:西方文化的重要组成部分

在数学哲学的研究领域中,一般不包括数学文化(mathematical culture),但是克莱因在对数学文化的研究中,却大量地探讨了数学哲学问题,以至于我们不得不把他在这方面的思想纳入他的数学体系之中。在文化这一更为广阔背景下,讨论数学的发展、数学的作用以及数学的价值,可以使人们对数学本体论、数学真理性等问题认识得更清楚、更深刻。

克莱因研究数学文化的目的之一,就是为了让人们不仅从数学思想、方法的角度,而且还能从文化的角度欣赏数学的全貌和魅力,向人们昭示数学是人类文化的重要组成部分。数学在西方文明中一直是一种主要的文化力量。数学不仅在科学推理中具有重要的价值,在科学研究中起着核心作用,在工程设计中必不可少,而且“数学决定了大部分哲学思想的内容和研究方法,摧毁和构建了诸多宗教教义,为政治学说和经济理论提供了依据,塑造了众多流派的绘画、音乐、建筑和文学风格,创立了逻辑学,而且为我们必须回答的人和宇宙的基本问题提供了最好的答案。……作为理性精神的化身,数学已经渗透到以前由权威、习惯、风俗所统治的领域,而且取代它们成为思想和行动的指南。最为重要的是,作为一种宝贵的、无可比拟的人类成就,数学在使人赏心悦目和提供审美价值方面,至少可与其他任何一种文化门类媲美”^①。一般人也许认为他所说的这些不过是夸夸其谈,是数学家面临着数学在社会文化中每况愈下状况的哀叹,但是当读完厚近 500 页的《西方文化中的数学》时,人们就会情不自禁地感叹:我们对数学了解得太少了。至少从

^① 本书第 VI 页。

文化角度是如此。在这本书中,克莱因按照历史顺序,从古埃及、古希腊开始详尽地论述了数学与文化发展的关系,直到20世纪数学与社会文化的相互联系,其中不乏独到的分析、精辟的见解。《科学美国人》评价说:“这是一部激动人心的、使人深思的著作。”

对于数学与文化发展的关系,克莱因的一个基本观点是:两者休戚相关。“一个时代的特征在很大程度上与该时代的数学密切相关。”希腊文化、罗马文化是这一观点的极好例证。正是由于古希腊强调严密推理、追求理想与美的数学高度发达,才使得古希腊具有优美的文学、极端理性化的哲学、理想化的建筑与雕刻,才使得古希腊社会具有现代社会的一切胚胎,也正是由于数学创造力的缺乏,才使得罗马民族缺乏独创精神,罗马建造了高标准的跑马场、浴池、雄伟的凯旋门,但罗马文化却是外来文化。克莱因认为,数学和来源于人类理性卓越光辉的真正激情第一次被希腊人激发了,他们的数学成就表明,在人类活动中,思想具有至高无上的作用,而且提供了文明的一个新概念;希腊人最大限度地决定着今天文明本质的贡献是他们的数学,这是希腊人为人类奉献的最好的礼物^①。英国著名历史学家汤因比(Arnold J. Toynbee, 1889—1975)曾指出,世界上曾经存在有21种文明,但只有希腊文明转变成了今天的工业文明,之所以如此,就是因为数学在希腊文明中提供了工业文明的要素。“言必称希腊”是历史的必然。

不仅如此,数学还是一棵富有生命力的树,她随着文明的兴衰而荣枯。在分析罗马文化、中世纪基督教文化与数学的关系时,他指出:“罗马人的实用主义结出的是不育之果,而基督教的神秘主义坚持要完全无视自然界,实际效果是阻碍了知识的进步,扼杀了创新精神。大量的历史事实表明,在这两种情形中,数学都不能蓬勃发展。数学只有在这样一种文化环境中才能结出累累硕果:在这种文化环境中,人们既能自觉自愿地探讨与自然界有关联的问题,与此同时,又允许思想毫无限制地自由发展,而不必去考虑是否能

^① 本书第38页,第57—58页。

立刻解决人类及其世界所面临的问题。”^①从文化背景分析数学的发展,今天已经引起越来越多数学哲学家的重视,这无疑会加深人们对数学的认识。

文艺复兴,被克莱因称为“数学精神的复兴”。在《古今数学思想》、《数学与物理世界》、《数学:确定性的丧失》等著作中,他从数学自身的发展、科学发展论证了这一观点,在《西方文化中的数学》中,则从更广阔的文学、艺术、哲学——人类文化的几乎所有领域,再次论证了他的看法。欧洲人继承了自然界具有数学设计的思想,相信理性可以应用于人类的所有活动,一旦人们掌握了理性精神,西方文明就诞生了。在剖析达·芬奇的透视理论时,他认为,射影几何是“从艺术中诞生的数学”,在考察牛顿的数学成就及其思想时,他详细地分析了牛顿在三方面的影响:科学和哲学、宗教、文学和美学。我们认为,这样的研究为我们全面了解文化发展,具有重要的价值。对此,克莱因自己也作出了评价:数学在近代“推动了人们对世界广泛的理性探索,这一探索包括社会、人类、人类的每一种生活方式、习俗。这一时期为后代留下了范围极广的、包罗万象的规律。它还使我们的文明进入了追求真正的全知全能的时代,激发了把思想组织建立在数学模式上的系统的愿望,而且使人们对数学和科学的力量深信不疑。17、18世纪数学创造最伟大的历史意义是:它们为几乎渗透到所有文化分支中的理性精神注入了活力”^②。

不仅如此,数学还对欧洲社会的工业文明,对自由民主精神,更对人们的世界观产生了重大影响。数学对文化的更为本质的影响是在现代,可惜的是这种影响还没有为人们所认识。正是在我们这个时代,数学在对文化的影响方面才达到了它应该有的范围,而且有着不同寻常的用途。克莱因认为,由于数学已经广泛地影响着现代生活和思想,因此今天的西方文明与以往任何历史上的文明都有着明显的区别。从这个角度出发,我们不妨认为,数学文化的一个

① 本书第 95—96 页。

② 本书第 285 页。

重要方面,就是阐述人类文明是如何受惠于数学的。也许,人之有理性也就在此吧。

数学文化应该包括两个方面:作为人类文化子系统的数学文化,它所涉及的是数学与其他文化、与整个文明的关系;另一方面就是数学本身作为一个文化系统,它的发生、发展及其结构。克莱因主要讨论的是数学文化的第一方面,对于第二方面谈得较少,不过在他的研究中也涉及了第二方面的问题。其中最富有特色的是,剖析了数学作为一种文化,它的语言系统、发展动力与价值系统。

如同音乐利用符号(乐谱)来代表和传播声音一样,数学也用符号表示数量关系和空间形式。克莱因认为,这是数学作为一个独立系统的重要特征。

关于数学的发展动力和价值标准,人们往往只注重应用方面、科学方面,而对于审美情趣、好奇心、智力挑战、心灵的满足诸方面,要么不予承认,要么就是承认,也认为只不过是其次的。但是,克莱因却认为:“实用的、科学的、美学的和哲学的因素,共同促进了数学的形成。把这些作出贡献、产生影响的因素除去任何一个,或抬高一个而去贬低另外一个都是不可能的,甚至不能断定这些因素中哪些具有相对的重要性。一方面,对美学和哲学因素作出反应的纯粹思维,决定性地塑造了数学的特征,并且做出了像欧氏几何和现代非欧几何这样不可超越的贡献。另一方面,数学家们登上纯思维的顶峰不是靠他们自己一步步攀登,而是借助于社会力量的推动。如果这些力量不能为数学家们注入活力,那么他们就立刻会身疲力竭;然后这门学科将处于孤立的境地。虽然在短时期内还有可能光芒四射,但所有这些成就就是昙花一现。”^①在判定数学的价值方面,和谐、美、心灵的满足以及情感也同样与实用的、科学的标准并驾齐驱^②。

我认为,上述观点可以看作是数学本体论、数学真理论方面的

① 本书第5页。

② 本书第465—470页。

多重标准论。的确,判定数学的价值和真理性不仅应有实用的、科学的标准,也要有美学的、哲学的标准,甚至这些标准是并重的,尤其是在数学丧失了实用的、科学的确定性,真理性的情况下。数学的当代发展、数学的本质、数学的历史注定了数学的标准是多重的!

千万不要误会,克莱因并不主张数学作为人类文化与人类精神是万能的。人的理性只是人的本性的一部分,人的欲望、感情与本能等动物性常常与理性冲突,作为人类理性的数学不可能引导、控制人的全部行动。尽管如此,数学作为人类文化的重要组成部分依然是有所作为的,尤其是在越来越多的人逐渐走向理智的时代。