第二十九章

失 乐 园?

康托尔

老对手,新面孔。腐朽的信条。康托尔的艺术遗传与父亲的固执。逃脱了,但是太迟了。他的革命性工作使他一事无成。学术上地位低微。“安全第一”的灾难性后果。一个划时代的结论。是悖论还是真理?超越数的无穷存在。咄咄逼人地前进,胆怯地退却。进一步的惊人主张。两种类型的数学家。疯了?反革命。斗争更激烈了。诅咒敌人。普遍动怒。今天数学的状况如何?明天的数学又将如何?

如同一切其他学科,现在轮到数学在显微镜下向世界揭示它根基上可能存在的弱点了。

——F·W·韦斯塔韦(F. W. Westaway)

由格奥尔格·康托尔(1845 ~ 1918)在 1874 ~ 1895 年创造的 *Mengenlehre*(集合论,或类论,特别是无穷集论)所引起争论的话题,按照它的年代顺序,很可以作为本书的结尾。这个论题对于数学来说,象征着那样一些原则的总崩溃,19 世纪有先见之明的预言家们认为这些原则在从物理科学到民主政府的一切事物中是极其合理的。这些预言家们预见到了一切,只是没有预见到这场大崩溃。

如果说用“崩溃”来描述世界正在尽情享受的那场转变,

可能是言重了，那么，科学思想的进化正在如此迅速多变地进行着，以至确实很难把这一进化与革命区分开来。

没有过去的错误作为动荡的根深蒂固的焦点，物理科学现在的激变也许不会发生；但是认为我们的前辈有我们自己这一代正在做的事情的全部灵感，那对他们来说是过誉了。这一点是值得考虑的，因为一些人可能很想说，数学思想上相应的“革命”(其开端现在看来是显而易见的)，只是对芝诺和古希腊其他一些怀疑论者工作的回声。

毕达哥拉斯在 2 的平方根上的困难，以及芝诺关于连续(或“无限可分性”)的种种悖论——就我们所知——是我们现在的数学派系的起源。今天，那些关心他们学科的哲学(或基础)的数学家们，在用于数学分析中的推理的正确性上，分裂成至少两个派别，现在显然没有什么和解的希望，这种不一致可以退回许多个世纪，追溯到中世纪，再追溯到古希腊。所有各方面在数学思想的各个时代都有它们的代表，不管那个思想是隐藏在挑起争论的悖论中，像芝诺那样，还是隐藏在逻辑的微妙中，像中世纪一些最令人恼怒的逻辑学者那样。数学家们通常认为这些差别的根源是一个气质问题：试图把像魏尔斯特拉斯那样的分析学家，转变成像克罗内克那样的怀疑者的怀疑主义，必然会像试图把基督教的原教旨主义者转变成偏激的无神论者那样徒劳无益。

在这场论战中，引自几位领袖人物的几段注明日期的话，可以作为我们热衷于康托尔奇特的脑力生涯的兴奋剂(或镇静剂，视爱好而定)，康托尔的“实在的无穷理论”，在我们这一代加速了历史上关于传统数学推理正确性的最激烈的蛙鼠之战(爱因斯坦有一次这样称呼它)。

1831 年，高斯如下表达了他对“实无穷的恐惧”。“我反对把无穷量作为一个完全的东西来使用，在数学中决不允许

有这样的用法。无穷只是一种说话的方式，其真正的意义是指某些比值无限地趋近的某个极限，而另一些比值则可以无限制地增大。”

这样，如果 x 表示一个实数，那么当 x 增大时 $1/x$ 减小，我们能够找到 x 的一个值，使 $1/x$ 与零之差为任意预先给定的值(除零以外)，该值可以任意地小，当 x 继续增大时，差始终小于这个预先给定的值；“当 x 趋于无穷时”$1/x$ 的极限是零。无穷的符号是 ∞；$1/\infty=0$ 的论断有两个理由是无意义的：“用无穷去除”是一个没有定义的运算，因此没有意义；第二个理由就是高斯所说的。类似地，$1/0=\infty$ 也是无意义的。

康托尔既同意又不同意高斯的见解。他在 1866 年写到实(高斯称之为完全)无穷时，说“尽管在潜无穷和实无穷之间有本质的差别，前者意味着一个增加到超出所有有限限制(就如上述 $1/x$ 中的 x)的可变的有限量，而后者是一个超出所有有限量的固定的常量，只是它们太经常地被混淆了。”

康托尔接着说，数学中无穷的误用，在他那个时代谨慎的数学家中，理所当然地激起了对无穷的恐惧，恰像它激起高斯的恐惧一样。然而他坚持认为，所导致的“对合理的实无穷的不加鉴别的拒绝，不亚于对事物本性[不管那可能是什么——它似乎还没有作为整体揭示给人类]的违背，而这种本性必须该是什么就是什么”——无论其可能如何。康托尔就这样与中世纪的大神学家们为伍了，他是对这些神学家深有研究的学者和热烈的赞美者。

古老的问题的绝对肯定和完全解答，如果在吞下去之前先腌透，就能更好地咽下去了。这里是罗素在 1901 年关于康托尔对无穷作的普罗米修斯式的进攻所不得不说的话。

“芝诺关心过三个问题……这就是无穷小、无穷和连续的问题……从他那个时代到我们自己的时代，每一代最优秀的

智者都尝试过解决这些问题，但是广义地说，什么也没有得到。……魏尔斯特拉斯、戴德金和康托尔彻底解决了它们。它们的解答清楚得不再留下丝毫怀疑。这个成就可能是这个时代能够夸耀的最伟大的成就……无穷小的问题是魏尔斯特拉斯解决的，其他两个问题的解决是由戴德金开始，最后由康托尔完成的。”*

这一段文字中的热情，甚至今天还使我们感到温暖，虽然我们知道罗素在他和怀特海的《数学原理》第 2 版（1924 年）中承认，戴德金的“分割”（见第二十七章）并不是十全十美的——这个“分割”是分析学的脊髓。它在今天也不是十全十美的。今天在 10 年中支持或反对科学或数学中的一个特别信念所做的一切，比在古代、中世纪，或后来的文艺复兴时期的一个世纪中所做的还要多。今天着手解决一个突出的科学问题或数学问题的有才智的优秀人物，比以往任何时候都更多，最终结论成了原教旨主义者的私人财富。罗素 1901 年的评论中的那些最终结论，没有一个残存下来。四分之一世纪以前，谁看不见预言家们向他们保证的、像正午的太阳在夜半的天空中，闪耀在头顶上方那样的伟大光辉，谁就只能被称为傻瓜。今天，对于站在预言家一方的每一个有能力的专家，都有一个同样有能力的专家站在反对他的对立方。如果说什么地方有愚蠢的言行，它也是分布得非常均匀的，以至它不再是区分的标志。我们正在进入一个新时代，一个怀疑和适度谦卑的时代。

大约同一时期（1905 年）站在怀疑一边的，我们发现了庞加莱。“我讲到过……我们需要不断地回到我们科学的第一原理，也讲到过这对于研究人类思维的好处。这种需要已经

---

* 引自莫里茨（R. E. Moritz）的《数学大事记》，1914 年。我找不到原始出处。

激发了两个大胆的计划，它们在数学的最新发展中占有非常显著的位置。第一个是康托尔体系。……康托尔给科学引进了考虑数学无穷的新方法……但是我们遇到了会使爱利亚学派的芝诺和麦加拉学派高兴的一些悖论，一些明显的矛盾。所以每一个人都必须寻找补救的方法。就我来说——而我并不是单独一人，我认为重要的是永远不要采用一些不能用有限的文字完全定义的东西。不管怎样治好的，我们都可以像被召来治疗一个极好的病理学病例的医生那样感到喜悦。"

几年以后，庞加莱因其自身的缘故对病理学的兴趣多少有些减弱了。1908 年在罗马举行的国际数学大会上，这位厌倦了的医生自己说出了这样的预测："今后的几代人将把集合论当做一种人们已经从中康复过来的疾病。"

康托尔违反他自己的意愿不由自主地发现，"数学的肌体"害了重病，芝诺传染给它的疾病还没有得到缓解，这个发现正是康托尔最伟大的功绩。他那扰乱人心的发现是他自己聪明的一生的一种奇怪的共鸣。我们首先看一看他的物质生活的一些事实，这些事实本身也许不怎么有趣，但是这些事实后来对他的理论极有启发。

格奥尔格·费迪南德·路德维希·菲利普·康托尔（Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor）的双亲都是纯粹的犹太血统，他是富商格奥尔格·沃尔德马·康托尔（Georg Waldemar Cantor）和他的妻子、艺术家玛丽亚·博姆（Maria Bohm）的第一个孩子。父亲出生在丹麦的哥本哈根，但在年轻时移居俄国的圣彼得堡，数学家格奥尔格·康托尔于 1845 年 3 月 3 日出生在该城。1856 年父亲因患肺病移居德国的法兰克福，在那里过着舒适的退休生活，直到 1863 年去世。由于这种奇怪的多国籍混杂情况，几个祖国都有可能宣称康托尔是它们的儿子。

康托尔本人喜爱德国,但是不能说德国很热诚地喜爱他。

格奥尔格有一个弟弟康斯坦丁(Constantin),成了一名德国军官(很少有犹太人这样做),还有一个妹妹索菲·诺比琳(Sophie Nobiling)。弟弟是一位出色的钢琴家;妹妹是一位有成就的设计师。格奥尔格被抑制的艺术天性,在数学和哲学中找到了汹涌的发泄机会,它既是古典的,又是经院式的。孩子们显著的艺术气质是从他们的母亲那里继承来的。她的祖父是一个音乐指挥,她的一个兄弟住在维也纳,教出了著名小提琴家约阿希姆(Joachim)。玛丽亚·康托尔的一个弟弟是音乐家,一个侄女是画家。要是真像单调平庸的心理学支持者所宣称的,正常状态与不动感情的稳定性是一码事,那么在康托尔家族中的这一切艺术才华,也许就是康托尔不稳定性格的根源了。

这一家都是基督教徒,父亲皈依了新教;母亲生来就是罗马天主教徒。康托尔和他的主要对手克罗内克一样,偏爱新教一方,有一种对中世纪神学作没完没了的、无益而琐细的分析的奇特爱好。要是他没有成为数学家,那么很可能会在哲学和神学方面留下他的印记。可以提到与此有关的一件趣事,耶稣会会士们迫不及待地抓住康托尔的无穷理论,以他们敏锐的逻辑头脑,在超出他们对神学的理解之外的数学比喻中,发现了对上帝存在和圣三一及其三位一体、一体三位、相互平等、永远并存的不容置疑的证明。在过去 2500 年中,数学炫耀着一些美丽而奇怪的一致性,这是无与伦比的。康托尔有敏锐的机智,生气时有更锋利的舌头,说他嘲弄了这样的"证明"是自命不凡的荒谬愚蠢,这是十分公正的,尽管他本人是虔诚的基督教徒和神学专家。

康托尔的学生生涯同最有才华的数学家们一样——他最伟大的才能很早(在 15 岁以前)就得到了承认,对数学研究有

一种着迷的兴趣。他在一位私人教师那里接受了启蒙教育，接着在圣彼得堡的一所小学上学。当全家搬到德国时，康托尔先进了法兰克福的私立中学和达姆斯塔特的非古典式的学校，1860 年 15 岁时进了威斯巴登中学。

康托尔决心成为数学家，但是他讲求实际的父亲看出了这孩子的数学才能，顽固地想要强迫他学工程，因为工程是更有前途的谋生职业。在康托尔 1860 年行坚信礼之际，他父亲写信给他，表达了他自己以及格奥尔格在德国、丹麦和俄国的众多婶、姨、叔、舅及堂表兄弟们对这个有才华的孩子所抱的很高的希望："他们盼望你的正是成为一位特奥多尔·舍费尔(Theodor Schaeffer)，如果上帝愿意，也许成为工程学天空的一颗闪光的星星。"什么时候父母们才会了解让天生的赛马去拉车是专横愚蠢的呢？

对上帝的虔诚呼吁，在 1860 年是为了迫使这个敏感而虔信宗教的 15 岁孩子屈服，而在今天(感谢上帝！)会像一只网球那样，从我们这一代年轻人更硬的头上反弹回去。但是它重重地击中了康托尔。事实上它把他打昏了。年轻的康托尔深爱他的父亲，又有深厚的宗教天性，他无法看出这位老人只是在考虑他自己对钱的贪婪。这样，格奥尔格·康托尔极其敏感的头脑的第一次偏离就开始了。格奥尔格没有像今天有才能的孩子那样，有几分成功的希望就反抗，相反，格奥尔格没有反抗，他屈服了，最后就连顽固的父亲也明显地看出，他是在毁灭儿子的意愿。但是格奥尔格·康托尔在不顾自己天性的敦促，而试着去取悦父亲的过程中，播下了自我怀疑的种子，这使他后来成了克罗内克恶毒攻击的手到擒来的牺牲品，并造成他怀疑他的工作的价值。要是康托尔被培养成一个独立的人，他就决不会没有信心而去顺从那些已经功成名就的人。这种顺从使他的生活万般不幸。

当危害已经铸成时，父亲让步了。格奥尔格17岁时以优异的成绩完成了中学学业，这时他得到了“亲爱的爸爸”的允许，上大学学习数学。“我亲爱的爸爸！”格奥尔格用他孩子气的感激口吻写道，“你自己也能体会到你的信使我多么高兴。这封信确定了我的未来。……现在我很幸福，因为我看到如果我按照自己意愿选择，不会使你不高兴。我希望你能活到在我身上找到乐趣，亲爱的父亲；从此以后我的灵魂，我整个人，都为我的天职活着；一个人只要去做他渴望做的事情，做他内心的冲动驱使他去做的，他就会成功！”这个爸爸无疑是应该受到感激的，即使格奥尔格的感激照现代的意味看来，有一点儿过于卑从的基调。

1862年康托尔在苏黎世开始了他的大学生活，但是次年父亲去世，他转学到柏林大学。在柏林大学，他专攻数学、哲学和物理。他对前两个学科同样感兴趣；对物理学他可从来没有任何感情。他的数学指导教师是库默尔、魏尔斯特拉斯和他未来的敌人克罗内克。按照通常的德国习惯，康托尔在另一所大学度过了一段不长的时间，1866年在格丁根大学住了一学期。

在柏林有库默尔和克罗内克，数学就充满着算术气氛。康托尔深入钻研了高斯的《算术研究》，写出了他的博士论文，1867年获得博士学位，他的论文讨论高斯留下的关于不定方程

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$$

的 x, y, z 整数解的难点，其中 a, b, c 是任意已知整数。这是一项很不错的工作，但是不妨说没有哪一个读到它的数学家会预见到，这个22岁的稳健的作者，会成为数学史上一个最激进的发明者。在这项首次尝试中，才能无疑是显而易见的，但是天才——没有。在这篇严谨的经典论文中，没有一点伟

大发明者的迹象。

对于康托尔在29岁以前发表的所有早期工作,也可以这样说。这些工作是优秀的,但是任何像康托尔那样从高斯和魏尔斯特拉斯那里充分汲取了严格证明学说思想的有才气的人,都能够做出它们。康托尔最早钟爱的是高斯的数论,他是被证明的困难、严格、清晰和完善吸引到这个理论中来的。在魏尔斯特拉斯的影响下,他不久就另辟蹊径,从这一理论进入到严格的分析中,特别是三角级数(傅里叶级数)理论中了。

这个理论的难以捉摸的困难(其中无穷级数收敛性的问题比在幂级数理论中更不容易对付),似乎激励了康托尔比他的任何一位同代人更深入地研究分析的基础,这样就导致他对无穷本身的数学和哲学问题进行全面的研究,而这是关于连续、极限和收敛等全部问题的基础。康托尔在快满30岁时发表了他的第一篇关于无穷级数的革命性论文(在克列尔的杂志上)。这将在下面叙述。康托尔在这篇论文中建立的关于全部代数数集合的意想不到和似非而是的结果,以及直接使用的方法的标新立异,标志着这位年轻作者是一个见识独到、极具创造性的数学家。是否所有的人都承认新方法合理,这无关紧要;但全世界都承认一个在数学上带有全新东西的人已经出现。应该立刻给他一个有影响的位置。

康托尔的物质生活与任何一个不大出名的德国数学教授一样。他从来没有实现在柏林大学获得教授职位的抱负,那也许是德国能在康托尔最伟大、最有创见的多产时期(1874～1884,29岁到39岁)给予的最高荣誉了。他活跃的专业生涯全都是在哈雷大学度过的,那是一所独特的三流学院,他在1869年24岁时被任命为不领薪金的教师(一个全靠从学生那里收费维持生计的讲师)。1872年他成为讲师,1879年——

在对他工作的批评开始变成对他恶意的人身攻击的局面之前——他被任命为正教授。他最早的教学经历是在柏林的一所女子中学。为了这个奇怪的格格不入的工作，他得听一个数学上缺乏创见的庸人关于教学法的乏味演讲，然后才有资格取得教孩子们的国家证书。这对社会是一种浪费。

不管这样做是对还是错，康托尔为没有得到自己渴求的柏林大学的职位而责怪克罗内克。当两个学术界的专家在纯科学的问题上分歧严重时，如果他们知道“谨慎就是大勇”，那么他们就会做到对彼此的仇恨一笑了之，而不必为它们小题大作；不然，他们就会像其他人在面临敌对状况时那样，诉诸任何种类的交战手段。一种方法是以一种有效的阴险手段扑向对方，这种方法往往能在真诚友谊的幌子下达到他恶意的目的。但这里没有这样的手段！当康托尔与克罗内克都摸清对方意图时，他们吵翻了天，弃矜持而不顾，就差没把对方的喉咙切断了。或许这终究还是比假装虔诚的伪善更为体面的战斗方式——如果人们一定要战斗的话。任何战争的目的都是消灭敌人，对这桩不愉快的事情，表现出感情用事或武士风度，都是无能的战士的标志。克罗内克在科学论战上是一个最有能力的斗士；康托尔却是一个最无能的战士。但是，以后就会看出，克罗内克对康托尔的强烈敌意，并不完全是个人的，至少部分是出于科学，而且是不存偏见的。

1874 年，康托尔 29 岁时发表了他关于集合论的第一篇革命性论文，同年与瓦利·古特曼（Vally Guttmann）结婚，生了两个儿子和四个女儿。没有一个孩子继承了父亲的数学才能。

这一对年轻夫妇在因特拉肯度蜜月时，常和戴德金交往。戴德金也许是当时唯一试图认真而同情地了解康托尔的颠覆性学说的一流数学家。

在 19 世纪最后 25 年德国数学界的霸王们眼里，戴德金

本人是一个不大受欢迎的人，有独到见解的戴德金是同情科学上名声不佳的康托尔的。局外人有时候以为，在科学上，独创性总是会受到热烈欢迎的。数学史反驳了这个乐观的幻想：在牢固建立的科学中，触犯者的道路很可能与人类任何其他保守领域中的触犯者的道路同样艰难，即使人们承认这位触犯者由于超越顽固正统观念的狭窄范围而发现了有价值的东西，情况也仍然是这样。

如果戴德金同康托尔在向新的方向出击之前停下来考虑一下，他们两人都很可能得到他们本来指望得到的东西。戴德金整个职业生涯是在平庸的位置上度过的；现在戴德金的工作已被承认为德国有史以来对数学作出的最重要的贡献之一。那种认为戴德金情愿呆在默默无闻的困境中，而让智力上完全不比他高明的人，在得到公众和学术界尊敬的光荣中，像马口铁一般闪闪发光的说法，在那些本人是“雅利安人”而不是德国人的旁观者看来，纯粹是一派胡言乱语。

19世纪德国学术成就的理想，是一种完全等同于“安全第一”的崇高理想，也许它正确地说明了对待激进的独创性的一种极端高斯式的谨慎——可以想像，新事物可能并不完全正确。对于云雀的习性，一部诚实编纂的百科全书提供的信息资料，一般说来比一首关于同一题目的诗，比如雪莱的诗*，更加可靠。

在这样一种充斥着“所谓的事实”的气氛中，康托尔的无穷论——过去2500年中对数学的最令人不安的独创性贡献之一——所感受到的自由，大约同一只试图穿过一层冰冷胶粘的空气、飞上云霄的云雀的自由一样多。即便这个理论完全错了——而且就算有人认为它不能用任何类似康托尔认为

* 指雪莱的名诗《致云雀》。——译者

他已经开始研究的东西来加以补救——也应该得到较好的对待，而不能因为它是没有以正统数学的神圣名义给它正名的新事物，就向它扔砖头。

1874 年这篇开拓性的论文，着手建立起所有代数数集合的一个完全意想不到的、高度似非而是的性质。虽然这些数在前几章中已多次描述过，我们仍将再次说明它们是什么，以便清楚地阐明康托尔所证明的令人惊愕的事实的性质——在说到“证明”时，我们有意忽视了目前对康托尔所用推理的合理性的全部怀疑。

如果 r 满足一个有理整数(普通整数)系数的 n 次代数方程，而且如果 r 不满足次数小于 n 的这样的方程，那么 r 就是一个 n 次代数数。

这可以推广。因为很容易证明一个类型为

$$c_0x^n + c_1x^{n-1} + \cdots + c_{n-1}x + c_n = 0,$$

其中 c_i 是任意已知代数数(如上定义的)的方程，其任何根本身就是代数数。例如，按照这个定理，

$$(1 - 3\sqrt{-1})x^2 - (2 + 5\sqrt{17})x + \sqrt[3]{90} = 0$$

的所有的根都是代数数，因为系数是代数数。(第一个系数满足 $x^2 - 2x + 10 = 0$，第二个系数满足 $x^2 - 4x - 421 = 0$，第三个系数满足 $x^3 - 90 = 0$，这样，方程的次数分别是 2,2,3)。

想像(如果你能够)所有代数数的集合。这些数中，有所有的正有理整数 1,2,3,…，因为它们中的任意一个，比如说 n，满足一个代数方程 $x - n = 0$，方程中的系数(1 和 $-n$)是有理整数。但是除这些以外，所有代数数的集合还包括所有有理整系数二次方程的所有的根，所有有理整系数三次方程的所有的根，等等，以至无穷。所有代数数的集合应比其有理整数 1,2,3,…子集多包含无穷多个元素，这在直观上不是很明

显吗？它可能确实是明显的，但它碰巧是错的。

康托尔证明了全体有理整数 1,2,3,…的集合与“无穷地包含更广泛”的所有代数数的集合，恰恰包含着同样多的元素。

这里不能给出这个似非而是的陈述的证明，但是可以很容易地使这个证明所据的那一类方法——“一一对应”的方法——明白易懂。这会使有哲学头脑的人懂得基数是什么。在说明这个简单但多少有些难以捉摸的概念之前，先看看关于康托尔理论的这一个及其他一些定义的一种观点的表述可能是有益的，这种观点强调了一些数学家与许多哲学家之间在关于“数”或“量”的全部问题上态度的差异。

“一个数学家从来不用量本身去定义量，而一个哲学家会很愿意这样做；数学家定义量的相等、它们的和及它们的积，这些定义决定了或者说构成了量的全部数学性质。他甚至以更抽象、更形式化的方式，制定了符号，同时规定了符号必须据以组合的规则；这些规则足以表示这些符号的特性，给予它们数学意义。简言之，就像棋子是由决定它们的移动和它们之间的关系的约定来决定的那样，他用任意的约定来创造数学的实体。”* 并不是所有的数学思想学派都同意这种看法，但是它们至少提出了对下述的基数定义负责的一种“哲学”。

注意，定义中的开始阶段是以库蒂拉的开场白的精神描

* 库蒂拉(L. Couturat)，《论数学的无穷》，巴黎，1896，49 页。鉴于这部著作的很多部分现在已毫无希望地过时了，我们向普通读者推荐它，是由于它的透彻明确。波兰第一流的专家瓦克罗·西尔平斯基(Waclaw Sierpinski)写了一部说明康托尔体系的原理的著作《超穷数教程》(巴黎，1928)，任何具有小学程度和对抽象推理感兴趣的人都能理解它。波莱尔写的前言提供了必要的危险信号。上面库蒂拉著作的摘录与希尔伯特的方案具有某种历史兴味。它提前 30 年预见到希尔伯特关于他的形式主义的纲领。

述“同样的基数”；然后“基数”就像长生鸟一般从它的“同样性”的灰烬中再生了。这完全是一个在没有明确定义的概念之间的关系的问题。

当两个集合中的所有事物都能一对一地对应起来时，就说这两个集合有同样的基数。在配成对之后，每个集合中都没有不成对的东西了。

举几个例子可以讲清这个难懂的定义。这是那些很不明显而且不结果实的、深刻得被忽视了几千年的事物中的一个。集合(x, y, z)，(a, b, c)有同样的基数（我们不去愚蠢地说“当然！每一个包含三个字母”），因为我们能够把第一个集合中的x, y, z与第二个集合中的a, b, c像下面这样配成对：x对a，y对b，z对c，并且这样做了以后，我们发现在哪个集合中也没有剩下不成对的东西。显然还有其他进行分对的方式。再有，在一个根据法律实行一夫一妻制的基督教社会中，如果20对已婚夫妇坐在一起进餐，那么丈夫的集合就与妻子的集合有同样的基数。

作为这个“明显”同样的另一个例子，我们记起伽利略(Galileo)的全体正整数平方的集合和全体正整数集合的例子：

$$1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ 4^2,\ \cdots,\ n^2,\ \cdots$$
$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ n,\ \cdots$$

这个例子和上述例子之间的“似非而是”的差别是明显的。如果所有的妻子都离开餐室到客厅去，留下她们的丈夫饮葡萄酒聊天，那么正好有20个人坐在餐桌旁边，恰好是原来的一半。但是如果所有的平方数离开自然数，那么剩下来的恰好与原来的一样多。不管我们喜欢与否（如果我们是有理智的动物，我们就不会喜欢它），这个赤裸裸的奇迹就出现在我们面前：一个集合的一部分可以与整个集合有同样的基

数。如果有人不喜欢“同样基数”的“成对”定义,他可以接受挑战,去下一个更恰当的定义。

直觉(男人的,女人的,或数学的)已经被大大高估了。直觉是一切迷信的根源。

注意,在这个阶段一个头等重要的困难被掩饰过去了。一个集合或一个类是什么呢?用哈姆莱特(Hamlet)的话说,“这是一个问题。”* 我们要回到它,但是我们不回答它。不管谁能够成功地使康托尔的批评者们完全满意地回答这个天真的问题,都很可能会去解决针对康托尔巧妙的无穷论的一些更严重的障碍,同时在不动感情的基础上建立数学分析。为了明白这个困难不是微不足道的,试想所有正有理整数1,2,3,…的集合,问问你自己,与康托尔一起,你是否能在你心里把这个全体——它是一个“类”——当作一个确定的思考对象,就像三个字母的类 x,y,z 一样容易理解。为了领会康托尔所创造的*超穷数*,他要求我们做的正是这件事。

现在我们继续讲“基数”的定义,我们采用一个方便的专门术语:两个集合或类的元素能够一对一地配对(如在前面举出的例子中那样),就说它们是*相似的*。在集合(或类)x,y,z 中有多少元素呢?显然是3个。但是“3”是什么呢?下面的定义包含了一个答案:“一个给定类中的事物的*数目*,是相似于该给定类的所有类的那个*类*。”

从这个定义的尝试性解释中什么也得不到;必须就按它这样去理解。它是1879年由戈特洛布·费雷格(Gottlob Frege)提出的,1901年又由罗素再次(独立地)提出来。它有一点优于“类的基数”的其他定义,即它既可以应用于有限类,又可以

---

* 见莎士比亚名剧《哈姆莱特》第三幕第一场,原话为:“生存还是毁灭,这是一个问题。”——译者

应用到无穷类。那些认为这个定义对于数学而言过于神秘的人，可以按照库蒂拉的忠告，不要去尝试定义“基数”来避开它。不过，那样做也会引起一些困难。

康托尔的所有代数数的类，相似于（在上面定义的专门意义下）它的所有正有理整数的子类这一惊人结果，只是无穷类的许多完全意想不到的性质中的第一个。暂时假定他为了得出这些性质所用的推理是正确的，或者，即便康托尔留下的形式不是无可非议的，也能够把它变得严格，那么我们必须承认它的力量。

例如考虑超越数的“存在”。在先前的一章中，我们看到埃尔米特为证明这一类数中某个特殊的数的超越性，付出了多么巨大的努力。甚至在今天，也没有一般方法能用来证明我们怀疑是超越数的任何数的超越性；每一个新的类型都要求发明特殊的、巧妙的方法。例如，人们怀疑当 n 趋于无穷时由

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n$$

的极限所决定的数（这是一个常数，虽然从它的定义看好像是一个变量）是超越的，但是我们无法证明它。所需要的是指出这个常数不是任何有理整系数代数方程的根。

所有这一切提出了一个问题：“有多少超越数？”它们比整数、有理数或全体代数数更多呢，还是更少？由于（根据康托尔的定理）整数、有理数和全体代数数的数目相等，这个问题就归结为：超越数能用 1，2，3，…数遍吗？所有超越数的类，相似于所有有理整数的类吗？答案是否定的；超越数比整数多得无限地多。

这里我们开始进入集合论的引起争论的那些方面了。刚刚讲到的结论对于克罗内克那种性格的人，很像是一个挑战。

在讨论林德曼关于 π 是超越数(见第二十四章)的证明时，克罗内克问道，“你关于 π 的美妙研究有什么用呢？既然无理数[且因此超越数]不存在，为什么要研究这样的问题呢？”我们可以想像这种怀疑主义对于康托尔的超越数比整数 1,2,3,…多得无限地多的证明的影响，按照克罗内克的看法，整数 1,2,3,…是上帝最杰出的工作和唯一确实“存在”的数。

甚至康托尔的证明的概要，在这里也是无法讨论的，但是他所用的那类推理的一些东西，可以从下面的简单考虑中看出来。如果一个类相似于(在上面的专门意义下)所有正有理整数的类，就说这个类是*可数的*。一个可数类中的事物能够用 1,2,3,…数遍；一个不可数类中的元素不能用 1,2,3,…数遍：不可数类中的事物比可数类中的事物多。不可数类存在吗？康托尔证明了它们存在。事实上，在任何线段上的所有点的类就是不可数的，不论这个线段多么小(倘若它多于单独一个点)。

由此我们多少看出超越数为什么是不可数的。在高斯那一章，我们看到任何代数方程的任何根，都能用笛卡儿几何的平面上的点表示。所有这些根组成了所有代数数的集合，康托尔证明了这个集合是可数的。但是如果在单独一个线段上的点是不可数的，那么可以推知在笛卡儿平面上的*所有点*同样也是不可数的。代数数点缀在平面上，就像星星点缀漆黑的夜空；而稠密的黑色就是超越数的天空。

关于康托尔的证明，最值得注意的是，它没有提供哪怕是构造一个超越数的方法。对于克罗内克，任何这样的证明都是十足的废话。“存在的证明”的许多比较适度的例子都激起他的愤怒。这些例子中有一个特别有意思，因为它预示了布劳威尔反对在有关无穷集的推理中充分应用(亚里士多德的)古典逻辑。

一个多项式 $ax^n + bx^{n-1} + \cdots + l$，其中系数 $a, b, \cdots, l$ 是有理数，如果该多项式不能被分解成两个有理系数多项式的乘积，那么就称它为不可约的。现在，对大多数人来说，像亚里士多德会做的那样，断言一个已知多项式要么是可约的，要么是不可约的，是一个有意义的陈述。

对于克罗内克就不是这样了，按照克罗内克的看法，在提供某种确定的、能在明确的有限步内完成的过程，使我们能据以解决任何已知多项式的可约性之前，在逻辑上我们没有权利在数学证明中使用不可约的概念。按照他的说法，如果那样用了，那就是在我们的结论中引入了自相矛盾的东西，而且没有所叙述的过程就使用"不可约性"，充其量也不过只能给我们一种"未证实"的非最终的决定。所有这些非构造性的推理——按照克罗内克的看法——都是不合逻辑的。

由于康托尔在他的无穷类理论中的推理大多是非构造性的，克罗内克把它看作一类危险的数学疯狂。因为克罗内克看见数学在康托尔的领导下走向疯人院，同时也因为他狂热地致力于他所认为的数学真理，所以他用手边的一切武器，猛烈地、恶毒地攻击"实在的无穷理论"和它的过于敏感的作者，而这悲剧的结局不是集合论进了疯人院，而是康托尔进了疯人院。克罗内克的攻击摧毁了这一理论的创造者。

1884 年春，康托尔在 40 岁时经历了他的第一次精神崩溃，在他长寿的一生的随后岁月中，这种崩溃以不同的强度反复发作，把他从社会赶进精神病诊所这个避难所。他容易激动的脾气加剧了他的困难。一阵阵深深的沮丧使他在自己眼里都感到自卑，他开始怀疑他的工作的正确性。在一次神志清醒的间歇期间，他请求哈雷大学当局把他从数学教授席位换到哲学教席上去。他关于无穷的正确理论的一些最好的工

作是在两次发作的间歇期内完成的。当他从发病中康复过来时,他注意到他的头脑特别清醒。

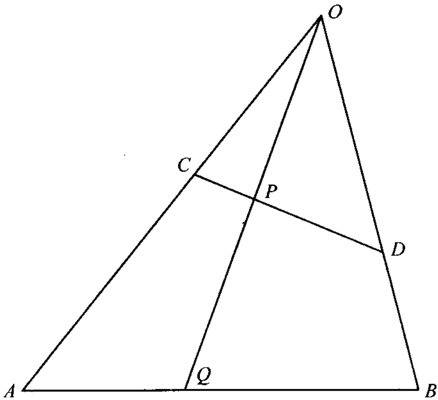
克罗内克或许由于康托尔的悲剧受到了过分严厉的指责;他的攻击只是许多起作用的原因中的一个。没有得到承认,使这个相信他朝着合理的无穷理论迈出了第一步——和最后一步——的人产生怨恨,沮丧得使自己患了忧郁症和丧失理性。不过,克罗内克看来的确要为康托尔没有得到他所渴望的柏林大学的职位负主要责任。人们通常认为,一个科学家把他对一个同代人的工作的猛烈攻击讲给学生听,是不够光明正大的。不同见解可以在科学文章中客观地解决。克罗内克于 1891 年竭尽全力在柏林大学他的学生们面前批评康托尔的工作,事情变得很明显,两人无法共事。由于克罗内克已经占有一个位置,康托尔只能扫兴地呆在一边。

但是,康托尔也并不是没有得到安慰。富于同情心的米塔-列夫勒不仅在他的杂志(《数学学报》)上发表了康托尔的著作,而且在康托尔与克罗内克争吵时安慰他,仅仅在一年的时间中,米塔-列夫勒就从痛苦的康托尔那里收到 52 封信。在那些相信康托尔理论的人当中,和蔼的埃尔米特是最热情的一个。他对新学说热诚的接受,温暖了康托尔谦虚的心:"埃尔米特在这封信中……关于集合论这个题目向我倾吐的赞扬,在我眼里是如此之高,如此地过誉了,以至于我都不愿意公布它们,以免让自己受到为它们所惑的指责。"

随着新世纪的到来,康托尔的工作渐渐开始被人们接受了,被认为是对整个数学,特别是对分析学基础的一个重大贡献。但是对于这个理论,不幸的是同时开始出现了仍然影响着它的悖论和自相矛盾。这些可能最终是康托尔的理论注定要对数学做出的最大贡献,因为它们在围绕无穷的逻辑和数

学推理的基础中意想不到的存在，是现在整个演绎推理中批判运动的直接启迪。我们希望能从这里得出一个比康托尔以前时代的数学更丰富、更“真实”——更摆脱了不一致——的数学。

康托尔最惊人的结果是在不可数集论中得到的，不可数集最简单的例子是一段线段上所有点的集合。在这里只能谈谈他的最简单的结论之一。与直观所能预测的相反，两个不等长的线段包含着同样数目的点。记住两个集合包含着同样数目的事物，当且仅当它们中的事物能够一对一地配对时，我们就容易看出康托尔这个结论的合理性。如图放置不等长的线段 AB，CD。线段 OPQ 交 CD 于点 P，交 AB 于 Q；这样，P 和 Q 就配成对了。当 OPQ 绕 O 旋转时，点 P 在 CD 上移动，同时 Q 在 AB 上移动，CD 上的每一个点有且仅有 AB 上的一个点与之“配对”。



可以证明一个更出乎意料的结果。任何线段，不管多么小，都包含着与无限长的直线同样多的点。进一步，线段包含的点，与在整个平面、或整个三维空间、或整个 n 维空间（这

里 n 是大于零的任意整数),或者最后,在可数无穷维空间中的点同样多。

这里,我们还没有试图去定义一个类或一个集合。也许(正如罗素在 1912 年认为的)为了对康托尔的理论有一个清楚的认识,或者为了使该理论自身保持一致——对任何数学理论这个要求都是必要的,下这样的定义是不必要的。然而现在的争论似乎要求给出某种清楚的、自洽的定义。下面的定义常常被认为是令人满意的。

一个集合是由 3 个特性表示其特点的:它包含着具有某种确定性质(比如说红色,或体积,或味道)的一切事物;没有这个性质的事物都不属于这个集合;集合中的每一个元素都可以被识别出是与集合中的其他事物相同还是不同——简言之,集合中的每一个事物都有一种永远可以辨认的个性。集合本身可以作为一个整体来把握。对于应用来说,这个定义可能是太严格了,例如,考虑一下在第 3 个要求下,康托尔的所有超越数的集合会怎么样。

在这一点上,我们可以回顾一下整个——或者由数学大师们在他们纯专业工作中的专题论文所揭示的那部分——数学史,并注意在几乎全部数学论著中不断反复出现的两种表达方式。读者们或许会对反复使用诸如“我们能找到一个大于 2 的整数,”或“我们能选择一个小于 n、大于 $n-2$ 的数”这样的话感到不愉快。选择这样的用语不只是老一套的卖弄学问。使用它们是有理由的,细心的作者在肯定“我们能找到,等等”时,是准确地意味着他们所说的意思的。他们的意思是他们能够做到他们所说的事情。

与此有明显区别的是在数学写作中一再出现的另一个习惯用语“存在”。例如,一些人会说:“存在一个大于 2 的整数,”或者“存在一个小于 n,大于 $n-2$ 的数。”使用这样的习

惯用语,肯定表明它的使用者相信克罗内克认为是站不住脚的信念——当然,除非这种"存在"能够由某种构造证明。对于出现在康托尔理论中的集合(如上面定义的),存在是不能证明的。

这两种说话方式把数学家分成两类:说"我们能"的人认为(也许是下意识的)数学纯粹是人的发明;说"存在"的人认为数学有它自己的超出人以外的"存在","我们"只能在我们的人生旅途中偶然发现数学的"永恒真理",这很像一个人在一座城中散步,遇到许多街道,而他与这些街道的规划没有任何关系。

神学家们是说"存在"的人;谨慎的怀疑主义者大多数是说"我们"的人。超出人以外的"存在"的拥护者说"存在无穷多的偶数,或无穷多的素数";克罗内克和说"我们"的人则说"把它们造出来"。

从《新约全书》中一个著名的例子,可以看出这个差别不是微不足道的。基督断言父"存在";腓力要求"将父显给我们看,我们就知足了。"* 康托尔的理论几乎完全是在"存在"一边的。有没有可能是康托尔对神学的热情决定了他的忠诚呢? 如果是这样的话,我们就得解释为什么克罗内克是那样偏执地说"我们"的人,他也是基督教神学的一个行家啊。正如在所有这样的问题中那样,任何一方的攻防手段都能够从随便哪个口袋中偷出来。

以"存在"方式来看待集合论的一个惊人的重要例子,是由著名的策梅罗(Zermelo)公设(1904 年提出)提供的。"对于其元素是一些集合 P 的每一个集合 M(也就是说,M 是一些集合的一个集合,或是一些类的一个类),这些集合 P 不空且

---

* 见《圣经·约翰福音》14:8。——译者

不相交(即没有两个集合包含共同的事物),至少存在一个集合 N,它恰好包含构成集合 M 的每一个集合 P 中的一个元素。”比较这个公设与前述集合(或类)的定义表明,如果集合 M 包含比如说无穷多条不相交的线段,说“我们”的人不会认为这个公设是不证自明的。然而这个公设看来是相当合理的。证明它的企图都失败了。它在一切与连续有关的问题中都相当重要。

说说这个公设是怎样被引进到数学中的,将提出康托尔理论的另一个尚未解决的问题。一个有互不相同的可数的元素的集合,就像一堵墙上的所有砖头,能够很容易地排出顺序;我们只需要用许多种会自动使人想起的不同方法中的一种,按 1;2,3,…数遍它们。但是我们怎样给直线上所有的点排序呢?不能按 1,2,3,…数遍它们。当我们考虑到在直线上的任意两个点之间“我们能找到”或“存在”该直线上的另一个点时,这项工作就显得毫无希望了。如果我们每一次数墙上相邻的两块砖,墙上就又有另一块砖出现在它们之间,我们的计算就会有点混乱了。然而直线上的点看来确实有某种顺序;我们能说出一个点是在另一个点的左边或是右边,等等。为一条直线上的点排序的努力没有成功。策梅罗提出了他的公设,以使这种努力更容易一些,但是它本身还没有被普遍接受为一个合理的假设,或者能可靠地使用的公设。

康托尔的理论包含的关于实无穷和(无限个)超穷数的“算术”的内容要比这里指出的多得多。但是由于这个理论仍然处在有争议的阶段,我们可以放下它,仅谈谈最后一个谜。是否“存在”或者我们能否“构造”一个集合,它既不相似于(在一一对应的专门意义上)所有正有理整数的集合,又不相似于直线上所有点的集合?答案是不知道。

康托尔于 1918 年 1 月 6 日在哈雷的精神病院去世,时年

73岁。他最后得到了荣誉和承认，甚至忘记了过去与克罗内克争吵的痛苦。康托尔在克罗内克1891年去世前的几年中，与克罗内克至少在表面上是和解了。回想起这件事，对他来说无疑是一种满足。要是康托尔能活到今天，那么在这场旨在使所有数学思想更严格的运动中，他是值得骄傲的，因为这场运动主要归功于他自己在一个合理的基础上建立分析(和无穷)的努力。

回顾为了使实数、连续、极限和无穷这些概念在数学上精确，并能一贯使用而进行的长期斗争，我们看到芝诺和欧多克斯在时间上距离魏尔斯特拉斯、戴德金和康托尔，并不像把现代德国和古代希腊分开的二十四五个世纪所意味的时间那样遥远。无疑，与我们的前辈们相比，我们对于所涉及的那些困难的性质，有更清楚的概念，因为我们看到同样没有解决的问题以新的面貌在古人从未梦想到的新领域中出现了，但是要说我们已经解决了那些年代久远的困难，那就是十足的谎报事实。然而最后的得分记录了比我们的前辈所能合理宣称的更大的成绩。我们的研究比他们曾经认为必要的研究还要深入，而且我们正在发现，他们在推理中采用的某些“法则”——例如亚里士多德的逻辑法则，在我们尝试将经验联系起来时，被其他法则——纯粹的约定——更好地代替了。正如已经说过的，康托尔的革命性工作，给了我们现在的活动最初的动力。但是人们不久——在康托尔去世之前21年——就发现他的革命要么是太革命了，要么是不够革命。现在看来是不够革命。

意大利数学家布拉利-福尔蒂(Burali-Forti)在1897年打响了反革命的第一枪，他通过康托尔在其无穷集论中所使用的那种类型的推理，提出了一个刺眼的矛盾。这个特殊的悖论只是几个悖论中的第一个。由于理解它需要很长的解释，

我们代之以罗素在1908年提出的悖论。

我们已提到过弗雷格,他把"相似于一个给定类的所有类的类"定义为这个给定类的基数。弗雷格花费多年的时间,试图把数的数学置于可靠的逻辑基础上。他毕生的著作是他的*Grundgesetze der Arithmetik*(《算术的基本法则》),第一卷于1893年出版,第二卷于1903年出版。在这部著作中使用了集合的概念。也对以前论述算术基础的作者们的明显错误和种种愚蠢,使用了大量多少带有挖苦的抨击。第二卷以下面的致辞结束:

> 一个科学家几乎不能碰到比这更难堪的事情了,即正当工作完成时,它的基础却垮掉了。当这部著作行将印完时,伯特兰·罗素先生的一封信就使我处于这样的境地。

罗素把他的"不是它们自身的元素的所有集合的集合"的巧妙悖论寄给了弗雷格。这个集合是自己的元素吗?稍微想一想就能推敲出,不论哪种答案都是错误的。然而弗雷格随意使用了"所有集合的集合。"

为了避免或消除那些像炸弹一般开始在弗雷格—戴德金—康托尔的实数、连续和无穷理论中全面爆炸的矛盾,提出了许多方法。弗雷格、康托尔和戴德金退出了这一领域,他们被打败了,沮丧至极。罗素提出他的"循环论证原理"作为一种补救办法:"涉及一个集合的所有元素的任何东西,必非该集合的元素";后来他又提出了"约化公理",由于这个公理现在实际上被抛弃了,我们没有必要叙述它。有一个时期,这些补救办法是卓有成效的(德国数学家们不这样认为,他们从未轻易接受它们)。渐渐地,随着全部数学推理的批判性检验取得了进展,这贴药便被抛弃了,在开出进一步的灵丹妙药之前,人们开始齐心协力找出使病人在无理数和实数中受苦的

究竟是什么。

现在为了解我们的困难所作的努力，始于1899年格丁根的希尔伯特(1862～)* 和1912年阿姆斯特丹的布劳威尔(1881～)**的工作。这两个人同他们众多的追随者有着共同的目标，即把数学推理置于合理的基础上，尽管他们的方法和哲学在几个方面是极端对立的。这两个人都各自相信自己是正确的，但看来并非完全如此。

希尔伯特向希腊寻找他的数学哲学的起源。他重新开始了毕达哥拉斯的计划，即给定一组严格而充分确定的公设，一个数学论证必须按照严格的演绎推理从这些公设开始。希尔伯特使数学的公设发展纲要比希腊人的更精确，并于1899年出版了他关于几何基础的经典著作的第一版。希尔伯特的一个要求是，为几何提出的公设应该被证明是自洽的(没有内在的、隐含的矛盾)，而希腊人似乎没有想到过这个要求。为了对几何作出这样一个证明，他指出由这些公设发展出来的几何中的任何矛盾，都隐含着一个算术方面的矛盾。这样，问题又回到证明算术的一致性，一直保持到今天。***

因此我们再次退回，请斯芬克斯**** 告诉我们数是什么。戴德金和弗雷格两人都逃向无穷——戴德金以他的无穷类定义无理数，弗雷格以他的相似于一个已知类的所有类的类定义基数——来解释迷惑过毕达哥拉斯的数。希尔伯特也到无

---

* 希尔伯特于1943年逝世。——译者

** 布劳威尔于1966年逝世。——译者

*** 哥德尔(KurtGödel, 1906～1978)在20世纪30年代证明了算术系统是不完备的。更进一步，他证明了在任何一个包含算术理论的系统中，一定都包含一个无法在该系统中证明的命题。——译者

**** 希腊神话中带翼狮身女怪。传说她常叫过路人猜谜，猜不出者即被杀害。——译者

穷中去寻找答案，他相信，无穷对于理解有限是必需的。他强烈相信，康托尔体系最终会从它现在在其中辗转不安的炼狱中解放出来。“在我看来，这[康托尔的理论]是数学思想的最令人赞美的果实，确实是人类智力活动的最高成就之一。”但是他承认布拉利-福尔蒂、罗素和其他一些人的悖论还没有得到解决。不过他的信念克服了一切怀疑：“没有人能把我们逐出康托尔为我们创造的乐园。”

但是在这个兴奋得意的时刻，布劳威尔出现了，他有力的右手握着看上去像是一把燃烧的剑一样的东西。驱逐开始了：扮演亚当的戴德金和在他旁边假扮成夏娃的康托尔，在这个不妥协的荷兰人的严厉注视下，已经忧心忡忡地看向大门。* 布劳威尔说，希尔伯特提出的保证免除矛盾的公设方法完成了它的使命——没有产生矛盾，但是，“用这种方法不会得到任何有价值的东西；一个错误的理论，即使没有因矛盾而告终，也仍然是错误的，正如一种有罪的策略，即使没有受到惩戒法庭的制止，也仍然是有罪的。”

布劳威尔反对他的对手们的“有罪的策略”，这一反对根源是一种新的东西——至少在数学上是新的。他反对不加限制地应用亚里士多德的逻辑，特别是在处理无穷集合时，他坚持认为当这样的逻辑用于在克罗内克的意义上(必须提供一个过程的规则，使集合中的事物能由它产生出来)不能确切地构造出来的集合时，必然会产生矛盾。“排中”律(一个东西必定有某种性质，或者必定没有那种性质，例如断言一个数要么是素数，要么不是素数)只有当用于有限集合时才是合理的。

---

* 亚当为《圣经》中所说的上帝创造的第一个男人，夏娃是第一个女人，由于蛇的诱惑，夏娃唆使亚当偷吃了天堂中的禁果，两人随即被逐出乐园，见《旧约全书·创世记》第二、第三章。——译者

亚里士多德发明他的逻辑，是作为用于有限集合的一组资用规则，把他的方法建立在人类对于有限集合的经验的基础上，没有任何理由认为当适用于有限的逻辑应用到无穷时，会继续产生一致的(无矛盾的)结果。当我们回想起无穷集的真正定义是强调一个无穷集的一部分可以包含与整个集合同样多的元素(如我们多次解释的那样)时，这似乎是很合理的；当"部分"意味着一些而不是一切(如在无穷集定义中那样)时，定义所强调的这种情形对有限集永远不会发生。

这里我们有了某些人认为的康托尔实无穷理论中麻烦的根源。至于集合的这个定义(如前所述)——把所有具备某种性质的事物"结合"形成一个"集合"(或"类")，并不适合于作为集合论的基础，这是由于这个定义要么不是构造性的(在克罗内克的意义上)，要么设想了没有人能做出来的构造性。布劳威尔宣称，排中律在这种情形的应用充其量也不过是对那样一些命题的启发式指引，这些命题可能成立，但不是必然成立，即使它们是严格运用亚里士多德的逻辑推断出来的。他还说在过去半个世纪中，许多错误的理论(包括康托尔的理论)都在这个脆弱的基础上建立起来了。

在数学思维基础上的这样一场革命，不可能没有挑战。反动右翼的粗暴咆哮，加速了布劳威尔朝向左翼的激进运动。"外尔(Weyl)和布劳威尔[布劳威尔是领导者，外尔是他在反叛中的伙伴]正在做的事情主要是步克罗内克的后尘，"这是希尔伯特的说法，他是现状的维护者。"他们想抛弃不合他们心意的一切，并下一道封锁的禁令，试图这样来建立数学。其效果是肢解我们的科学，冒着失去我们大部分最有价值的东西的危险。外尔和布劳威尔谴责无理数、函数——甚至诸如在数论中的函数，康托尔的超越数等等一般概念，谴责正整数的无穷集有最小元素的定理，甚至谴责'排中律'——例如"要

么只有有限个素数,要么就有无穷多个"这样的论断。这些是[他们]所禁止的定理和推理模式的例子。我相信,正如克罗内克废除无理数的企图不起作用那样(外尔和布劳威尔确实允许我们保留一份残缺),事实会证明,他们今天的努力同样是不起作用的。不!布劳威尔的计划不是一场革命,只是用老方法重复一种无用的奇袭,这是以更大的热情进行的,然而完全失败了。今天,这个领域[数学]通过弗雷格、戴德金和康托尔的劳动,彻底装备起来并且加强了。布劳威尔和外尔的努力注定是毫无结果的。"

另一方对此的回答只是耸耸肩,继续其在坚实的基础上重建数学(特别是分析学基础)的伟大而重要的新任务。这个坚实的基础要比从毕达哥拉斯到魏尔斯特拉斯的过去 2500 年中人们所奠定的基础更坚实。

到这些困难都被清除——我们希望如此——之后的一代人那时,数学会是什么样子呢?只有某一位预言家或某一位预言家的第七个儿子会把头伸进预言的绞索。但是如果在数学的进程中终究有任何连续性——大多数不带偏见的旁观者都认为有——的话,那么我们应该发现未来的数学将比我们或我们的前辈所知道的数学内容更广泛、更坚实、更丰富。

过去三分之一个世纪的争论,已经给数学的广大版图添加了新的领域——包括全新的逻辑,新的领域正在迅速地与旧有的领域合为一体,协调一致。如果我们可以莽撞地冒险预测,那么未来的数学会比现在正有力地重新形成的数学更清新,在各方面更年轻,更接近人类的思想和人类的需要——更能摆脱它诉诸超出人以外的"存在"的合理性。数学的精神长青。正如康托尔所说,"数学的本质在于它的自由";现在的"革命"只是对那种自由的另一种主张。

*　　*　　*

遭受挫折和失败，她仍工作不息，
心灵困乏和烦闷，她工作做得更起劲，
有她不屈不挠的意志支撑：
双手将会制作，头脑将会思索，
而她的一切悲伤将会变为劳作，
直到死亡这友好的敌人，用他的长剑刺破
那强有力的内心，结束这辛酸的战斗。

——詹姆斯·汤姆森(James Thomson)*

* 詹姆斯·汤姆逊(1834～1882)，英国诗人，随笔作家。引自其《可怖的黑夜城市》(1874)。——译者